Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātikas nodaļa
Matemātiskās analīzes katedra

Jānis Buls

REGULĀRAS VALODAS

2011

Ievads

Automātu teorija pārstāv vadības sistēmu teorijas nodaļu, kas pēta matemātiskus modeļus, kuri pārveido diskrētu informāciju. Šos matemātiskos modeļus sauc par automātiem. No zināma redzes viedokļa šādi pārveidotāji ir gan reālas ierīces (skaitļošanas ierīces, elektroniska aparatūra), gan abstraktas sistēmas (matemātiskas mašīnas, aksiomātiskas teorijas). Raksturīga šo pārveidotāju īpašība ir funkcionēšanas diskrētums un to aprakstošo parametru vērtību galīgums.

Automātu teorija radās divdesmitā gadsimta vidū, sakarā ar galīgu automātu īpašību pētīšanu. Ar laiku šīs teorijas pētījuma priekšmets paplašinājās, aplūkojot dažādus galīgu automātu vispārinājumus. Galīgu automātu var raksturot kā ierīci ar ieejas un izejas kanāliem. Šī ierīce katrā no diskrētiem laika momentiem (takts momentiem) atrodas vienā no galīga skaita stāvokļiem. Katrā takts momentā pa ieejas kanālu ierīcē ienāk ieejas signāli (parasti no kādas galīgas signālu kopas) un tai pašā laikā ierīces izejas kanālā parādās izejas signāli. Automāta funkcionēšanu raksturo ar likumu, kas norāda stāvokļu maiņu nākošajā takts momentā, kā arī ar likumu, kas nosaka izejas signāla vērtību.

Apzīmējumi

$\neg$ — negācija,
$\vee$ — disjunkcija; daļēji sakātrtotā kopā suprēms,
$\wedge$ — konjunkcija; daļēji sakārtotā kopā infīms; $\&$ — konjunkcija,
$\Rightarrow$ — implikācija, $\Leftrightarrow$ — ekvivalence,
$\exists$ — eksistences kvantors, $\forall$ — universālkvantors,
$\exists xy\ P(x,y)$ ir formulas $\exists x\,\exists y\ P(x,y)$ saīsināts pieraksts,
$\exists xy \in A\ P(x,y)$ ir formulas $\exists xy\ \big(x \in A \wedge y \in A \wedge P(x,y)\big)$ saīsināts pieraksts,
$\forall xy\ P(x,y)$ ir formulas $\forall x\,\forall y\ P(x,y)$ saīsināts pieraksts,
$\forall xy \in A\ P(x,y)$ ir formulas
$\forall xy\ \big(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow P(x,y)\big)$ saīsināts pieraksts,

$x \in X$ — elements x pieder kopai X jeb x ir kopas X elements,
$A \subseteq B$ — kopa A ir kopas B apakškopa,

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ — kopu A un B apvienojums, šķēlums, starpība,
$\leftrightharpoons$, $\rightleftharpoons$ — vienādības saskaņā ar definīciju,
$\overline{1,n} \leftrightharpoons \{1, 2, \ldots, n\}$; $\overline{k,n} \leftrightharpoons \{k, k+1, \ldots, n\}$, te $k \leq n$,
$\mathbb{Z}$ — veselo skaitļu kopa, $\mathbb{Z}_+ \leftrightharpoons \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$, $\mathbb{N} \leftrightharpoons \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$,
$\aleph_0$ — kopas $\mathbb{N}$ apjoms, $\mathfrak{c}$ — reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apjoms,
$\langle x, y \rangle \leftrightharpoons (x, y) \leftrightharpoons \{\{x\}, \{x, y\}\}$,
$x_1 x_2 \ldots x_n \leftrightharpoons (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightharpoons ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, u^n,
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftrightharpoons \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \overline{1,n}\, (x_i \in A_i)\}$,
A^n, $|u|$, $|u|_v$,
$f : x \mapsto y$, $f : X \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} Y$, $X \overset{f}{\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}} Y$, $f : X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$,
$\mathrm{Dom}(f) \leftrightharpoons \{x \mid \exists y \in Y\ (f : x \mapsto y)\}$, $\mathrm{Ran}(f) \leftrightharpoons \{y \mid \exists x \in X\ (f : x \mapsto y)\}$,
$\mathrm{pr}_i \varrho$, $\mathrm{pr}_i g$,
$f : X \twoheadrightarrow Y$, $f : X \hookrightarrow Y$,
A^+, λ, A^*

$a \searrow b$ — skaitlis b ir skaitļa a daudzkārtnis, vai arī vārds a ir vārda b dalītājs,
$a \not\searrow b$ — skaitlis b nav skaitļa a daudzkārtnis, vai arī vārds a nav vārda b dalītājs,
$D(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leftrightharpoons \{q | \forall i \in \overline{1,n}\ q \searrow a_i\}$,
$\mathrm{ld}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leftrightharpoons \max D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
$\mathrm{md}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mazākais kopīgais dalāmais,

$a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ — skaitļi a un b ir kongruenti pēc moduļa m,

$\square$ — pierādījuma sākums,
$\blacksquare$ — pierādījuma beigas;
$\Rightarrow$ — implikācijas zīmi pierādījuma sākumā mēs izmantojam, lai norādītu, ka tagad sākas teorēmas nepieciešamā nosacījuma pierādījums,
$\Leftarrow$ — šo zīmi pierādījumos mēs izmantojam, lai norādītu, ka tagad sākas teorēmas pietiekamā nosacījuma pierādījums.
$\overset{L2.7.2}{=}$ — šo apzīmējumu pierādījumos mēs izmantojam, lai norādītu, ka vienādības pamatotība balstās uz lemmu 2.7.2 (saprotams, ka lemmas 2.7.2 vietā var būt jebkura cita lemma, apgalvojums, teorēma, formula, utm.).

1. Vairākšķiru algebras

Kopu $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ sauc par elementu $x \in X$ un $y \in Y$ *sakārtotu pāri* un lieto apzīmējumu (x, y) vai $\langle x, y \rangle$. Pāri $((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, kur $\forall i \in \overline{1,n}$ $(x_i \in A_i)$ sauc par *n-dimensionālu kortežu* pār kopām $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Turpmāk n-dimensionāla korteža apzīmēšanai lietosim pierakstu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Par kopu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *Dekarta reizinājumu* sauc visu n-dimensionālo kortežu kopu pār kopām $A_1, A_2, \ldots, A_n$, t.i.,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftrightharpoons \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \overline{1,n}\, (x_i \in A_i)\}.$$

Ja $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, tad lieto arī pierakstu $A^n \leftrightharpoons A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Kopas $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ apakškopu ϱ mēdz saukt arī par *n-vietīgu attieksmi*, kas definēta kopā $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Šai situācijā kopu A_i, $i \in \overline{1, n}$, sauc par attieksmes ϱ *i-to projekciju* un lieto apzīmējumu $A_i = \mathrm{pr}_i \varrho$.

Trijnieku $f = \langle X, Y, F \rangle$, kur $F \subseteq X \times Y$ sauc par *attēlojumu* jeb *funkciju*, ja visiem kopas F elementiem $(x, y), (x, z)$ ir spēkā vienādība $y = z$. Kopu X sauc par attēlojuma f *starta* jeb *izejas* kopu, Y — par *finiša* jeb *ieejas* kopu, F sauc par *grafiku.* Ja $(x, y) \in F$, tad lieto pierakstu $f(x) = y$ jeb $f : x \mapsto y$. Vispārīgs pieraksts $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ (lieto arī pierakstu $X \overset{f}{\multimap\!\!\rightarrow} Y$) norāda, ka f ir attēlojums ar starta kopu X un finiša kopu Y.

Kopu $\mathrm{Dom}(f) \leftrightharpoons \{x \mid \exists y \in Y\, (f : x \mapsto y)\}$ sauc par attēlojuma $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ *definīcijas apgabalu.* Savukārt kopu $\mathrm{Ran}(f) \leftrightharpoons \{y \mid \exists x \in X (f : x \mapsto y)\}$ sauc par attēlojuma f *vērtību apgabalu.* Attēlojumu $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ sauc par *visur definētu attēlojumu*, ja $\mathrm{Dom}(f) = X$. Šai gadījumā mēdz lietot vienu no apzīmējumiem

$$f : X \to Y \quad \text{vai} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Pretējā gadījumā attēlojumu $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ sauc par *daļēji definētu,* proti, ja

$$\exists x \in X\ x \notin \mathrm{Dom}(f).$$

Visur definētu attēlojumu $g : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_{n+1}$ sauc arī par *n-vietīgu algebrisku operāciju.* Šai situācijā kopu X_i, $i \in \overline{1, n+1}$, sauc par operācijas g *i-to projekciju* un lieto apzīmējumu $X_i = \mathrm{pr}_i g$.

Attēlojumu $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ sauc par *sirjekciju* un lieto apzīmējumu $f : X \twoheadrightarrow Y$, ja $\mathrm{Ran}(f) = Y$. Attēlojumu f sauc par *injekciju* un lieto apzīmējumu $f : X \hookrightarrow Y$, ja dažādiem elementiem x_1, x_2 atbilst dažādi y_1, y_2, t.i.,

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2\, [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Ja algebriska operācija $h : X \to Y$ ir gan sirjekcija, gan injekcija, tad to sauc par *bijekciju.*

Trijnieku $\langle K, O, A \rangle$ sauc par *n-sugu (šķiru) algebrisku sistēmu*, ja

(i) $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$, kur K_i, $i \in \overline{1, n}$, ir dažādas netukšas kopas,

(ii) O ir algebrisku operāciju $\circ_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{k(i)} \to Y$ kopa, kur $\forall j \in \overline{1, k(i)}\, (X_j \in K)$, kā arī $Y \in K$,

(iii) A ir dažādu attieksmju $\varrho_i \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{m(i)}$ kopa, kur $\forall j \in \overline{1, m(i)}\, (X_j \in K)$,

(iv) $\forall i \in \overline{1, n}\, [\, \exists \circ \in O\, \exists j\, (\, K_i = \mathrm{pr}_j \circ) \vee \exists \varrho \in A\, \exists j\, (K_i = \mathrm{pr}_j \varrho)]$.

Ja kopas O un A ir galīgas, un nerodas pārpratumi, piemēram, $O = \{\circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_k\}$, $A = \{\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m\}$, tad $\langle K, O, A \rangle$ vietā lieto pierakstu $\langle K_1, K_2, \ldots, K_n; \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_k; \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m \rangle$. Ja $O = \emptyset$, tad algebrisko sistēmu sauc par *modeli*, ja turpretī $A = \emptyset$, tad — par *algebru.* Šai situācijā $\langle K, O, A \rangle$

vietā attiecīgi lieto pierakstu $\langle K, A\rangle$ vai $\langle K, O\rangle$, vai arī attiecīgi $\langle K_1, K_2, \ldots, K_n; \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m\rangle$ vai $\langle K_1, K_2, \ldots, K_n; \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_k\rangle$.

Trīs šķiru algebru $\langle Q, A, B; \circ, *\rangle$ sauc par *Mīlija mašīnu*, ja Q, A, B — galīgas netukšas kopas, $Q \times A \overset{\circ}{\to} Q$ un $Q \times A \overset{*}{\twoheadrightarrow} B$. Kopu Q sauc par mašīnas *iekšējo stāvokļu* kopu, A un B attiecīgi — par *ieejas* un *izejas* alfabētiem. Kopu A un B elementus sauc par *burtiem.* Operācijas $\circ$ un $*$ attiecīgi sauc par *pārejas* un *izejas* funkcijām. Parasti Mīlija mašīnas apzīmēšanai lietosim pierakstu $\langle Q, A, B\rangle$ atklātā veidā nenorādot operācijas $\circ$ un $*$.

Trīs šķiru algebru $\langle Q, A, B; q_0, \circ, *\rangle$ sauc par *iniciālu Mīlija mašīnu*, ja $q_0 \in Q$ un $\langle Q, A, B; \circ, *\rangle$ ir Mīlija mašīna. Iniciālas Mīlija mašīnas apzīmēšanai parasti lietosim pierakstu $\langle Q, A, B; q_0\rangle$ atklātā veidā nenorādot operācijas $\circ$ un $*$.

Mēs bieži aprobežosimies ar terminu *mašīna* (attiecīgi *iniciāla mašīna)* ar to saprotot Mīlija mašīnu (attiecīgi iniciālu Mīlija mašīnu).

2. Pusgrupas

Algebru $\langle S, \circ\rangle$ sauc par *grupoīdu*, ja $\circ$ ir divvietīga algebriska operācija $S \times S \overset{\circ}{\to} S$. Kā tas parasti pieņemts, arī mēs šai situācijā, teiksim: kopu S sauc par grupoīdu, ja tajā definēta divvietīga operācija $S \times S \overset{\circ}{\to} S$. Šāda izteiksmes forma ir vispārpieņemta, ja definē vienas šķiras algebrisku sistēmu. Grupoīdu S sauc par *pusgrupu*, ja tajā izpildās aksioma

$$(xy)z = x(yz)\,.$$

Kā parasti šādās situācijās operācijas simbols un universālkvantori netiek lietoti, bez tam klusu ciešot pieņemts, ka $(x, y, z) \in S^3$. Pusgrupas S elementu λ sauc par *neitrālo* elementu, ja visiem kopas S elementiem x izpildās nosacījums

$$\lambda x = x = x\lambda\,.$$

Dažkārt neitrālo elementu sauc par *vienības* elementu vai *nulli.* Pusgrupu ar neitrālo elementu sauc par *monoīdu.* Tipisks monoīda piemērs ir dotās kopas A visu pārveidojumu pusgrupa $T(A)$. Visur definētu attēlojumu $\sigma : A \to A$ sauc par kopas A *pārveidojumu.* Jebkurus divus kopas A pārveidojumus σ_1 un σ_2 var sareizināt, t.i., ja $\sigma_1 : A \to A$ un $\sigma_2 : A \to A$ ir kopas $T(A)$ elementi, tad $\sigma_1\sigma_2$ ir kopas $T(A)$ elements, kas definēts ar nosacījumu

$$\forall x \in A\ x(\sigma_1\sigma_2) \leftrightharpoons \sigma_2(x\sigma_1) \leftrightharpoons \sigma_2(\sigma_1(x))\,.$$

Šo operāciju mēdz saukt par attēlojumu *kompozīciju* (lieto arī terminu *reizināšana*). Monoīda $T(A)$ neitrālā elementa apzīmēšanai lietosim pierakstu $\mathbb{I}_A$. Ja neradīsies pārpratumi, tad aprobežosimies ar pierakstu $\mathbb{I}$.

Attēlojumu $f : S \to S'$ sauc par pusgrupas S *morfismu (homomorfismu)* pusgrupā S', ja

$$\forall x \forall y\ f(xy) = f(x)f(y).$$

Morfismu f sauc par *epimorfismu*, ja tas ir sirjekcija; injektīvu morfismu sauc par *monomorfismu*; bijektīvu — par *izomorfismu.* Ja $M = M'$, tad morfismu sauc par *endomorfismu.* Bijektīvu endomorfismu sauc par *automorfismu.*

Pusgrupu morfismu $f : M \to M'$ sauc par *monoīdu morfismu (homomorfismu)*, ja $f(\lambda) = \lambda'$, kur λ un λ' attiecīgi — monoīdu M un M' neitrālie elementi.

Algebru $\langle S, K, \circ, \cdot \rangle$ sauc par *pusgrupas S iedarbību uz kopu K no kreisās puses*, ja

(i) $\langle S, \cdot \rangle$ — pusgrupa,

(ii) $S \times K \xrightarrow{\circ} K$,

(iii) $\forall (a, b) \in S^2 \; \forall x \in K \; (a \cdot b) \circ x = a \circ (b \circ x)$.

Ja nerodas pārpratumi, tad aksiomu (iii) pieraksta šādi: $(ab)x = a(bx)$, t.i., nelieto operāciju simbolus: nedz punktu $(\cdot)$, nedz aplīti $(\circ)$.

Ja $\langle S, K, \circ, \cdot \rangle$ ir S iedarbība uz K no kreisās puses, tad, izmantojot operācijas $\cdot$ un $\circ$, kopu $S \times K$ var sekojoši pārvērst par pusgrupu $\langle S \times K, \odot \rangle$. Pieņemsim, ka (a, x) un (b, y) ir kopas $S \times K$ elementi, tad operāciju $(S \times K) \times (S \times K) \xrightarrow{\odot} S \times K$ definējam ar nosacījumu $(a, x) \odot (b, y) \leftharpoondown\!\!\!= (a \cdot b, a \circ y)$. Līdzīgi kā iepriekš, ja nerodas pārpratumi, tad operāciju simbolus nelieto. Tā rezultātā iegūstam pierakstu $(a, x)(b, y) = (ab, ay)$.

2.1. Lemma. *$\langle S \times K, \odot \rangle$ ir pusgrupa.*

□ Mums jāpārliecinās, ka operācija $\odot$ ir asociatīva. Pieņemsim, ka $(a, x), (b, y)$, (c, z) ir kopas $S \times K$ elementi, tad $(a, x)[(b, y)(c, z)] = (a, x)(bc, bz) = (a(bc), a(bz))$. Savukārt $[(a, x)(b, y)](c, z) = (ab, ay)(c, z) = ((ab)c, (ab)z) = (a(bc), a(bz)) = (a, x)[(b, y)(c, z)]$. ■

2.2. Lemma. *Pusgrupa $T(Q)$ iedarbojas uz Fun(Q,B) no kreisās puses, kur $Fun(Q, B) \leftharpoondown\!\!\!= \{f | Q \xrightarrow{f} B\}$.*

□ Pieņemsim, ka σ_1 un σ_2 ir kopas $T(Q)$ elementi, $f \in Fun(Q, B)$ un $q \in Q$, tad $q((\sigma_1\sigma_2)f) = f(q(\sigma_1\sigma_2)) = f(\sigma_2(\sigma_1(q)))$. Savukārt $q((\sigma_1(\sigma_2 f)) = (\sigma_2 f)(q\sigma_1) = (\sigma_2 f)(\sigma_1(q)) = \sigma_1(q)(\sigma_2 f) = f(\sigma_2(\sigma_1(q)))$. Tā rezultātā $(\sigma_1\sigma_2)f = \sigma_1(\sigma_2 f)$. ■

2.3. Apgalvojums. *$S(Q, B) \leftharpoondown\!\!\!= T(Q) \times Fun(Q, B)$ ir pusgrupa, kur pusgrupas operācija ir definēta ar nosacījumu $(\sigma_1, f_1)(\sigma_2, f_2) \leftharpoondown\!\!\!= (\sigma_1\sigma_2, \sigma_1 f_2)$.*

□ Abas iepriekšējās lemmas sniedz šī apgalvojuma pierādījumu. ■

Pieņemsim, ka A ir galīga kopa, ko turpmāk sauksim par *alfabētu*, bet kopas A elementus par — *burtiem.* Katru kopas $A^+ \leftharpoondown\!\!\!= \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ elementu $u \in A^+$ sauc par alfabēta A *netukšu vārdu.* Pieņemsim, ka $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ ir alfabēta A netukši vārdi, tad $u\#v \leftharpoondown\!\!\!= (u_1, u_1, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Šo kopā A^+ definēto operāciju sauc par *konkatenāciju.* Tā kā $(u\#v)\#w = u\#(v\#w)$ visiem alfabēta A netukšiem vārdiem

u, v, w, tad $\langle A^+, \# \rangle$ ir pusgrupa. Šo pusgrupu sauc par *kopas A veidoto brīvo pusgrupu A^+.*

Pieņemsim, ka $\lambda \notin A^+$ un $A^* \leftleftharpoons A^+ \cup \{\lambda\}$, tad kopu A^* var sekojoši pārvērst par monoīdu:

$$\lambda \# \lambda \leftleftharpoons \lambda, \quad \lambda \# u \leftleftharpoons u \rightrightharpoons u \# \lambda\,.$$

Šo monoīdu sauc par *kopas A veidoto brīvo monoīdu A^*.* Kopas A^* elementus sauc par *vārdiem*, λ — par *tukšo vārdu.* Kā tas tradicionāli pieņemts, ja nerodas pārpratumi, tad konkatenācijas operāciju izlaiž un lieto pierakstu $uv \leftleftharpoons u\#v$, bez tam $u_1 u_2 \ldots u_k \leftleftharpoons (u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Ja $u = u_1 = u_2 = \ldots = u_n$, tad lieto arī pierakstu $u^n \leftleftharpoons u_1 u_2 \ldots u_n$. Savukārt $u^0 \leftleftharpoons \lambda$.

Pieņemsim, ka $u \in A^n$, tad skaitli n sauc par vārda u garumu, ko turpmāk apzīmēsim ar $|u|$. Saskaņā ar definīciju pieņemsim, ka $|\lambda| \leftleftharpoons 0$.

1. nodaļa

Vārdi un to virknes

1.1. Valodas

1.1.1. Definīcija. *Vārdu $v \in A^*$ sauc par vārda $w \in A^*$ dalītāju, ja eksistē tādi $u \in A^*$ un $u' \in A^*$, ka $w = uvu'$. Šai situācijā vārdu u sauc par priedēkli, bet u' — par piedēkli.*

Vārda $w \in A^*$ visu dalītāju kopu apzīmēsim ar $\mathrm{F}(w)$, attiecīgi visu priedēkļu kopu — ar $\mathrm{Pref}(w)$, bet visu piedēkļu kopu — ar $\mathrm{Suff}(w)$.

1.1.2. Definīcija. *Kopas A^* patvaļīgu apakškopu L sauc par valodu alfabētā A. Ja kopa L ir galīga, tad valodu L sauc par galīgu valodu; līdzīgi, ja L ir bezgalīga kopa, tad valodu L sauc par bezgalīgu valodu.*

Kopu $\mathrm{F}(L) \leftharpoondown \bigcup_{w \in L} \mathrm{F}(w)$ sauc par valodas L *dalītāju kopu.* Attiecīgi kopas $\mathrm{Pref}(L) \leftharpoondown \bigcup_{w \in L} \mathrm{Pref}(w)$ un $\mathrm{Suff}(L) \leftharpoondown \bigcup_{w \in L} \mathrm{Suff}(w)$ sauc par valodas L *priedēkļu* un *piedēkļu kopām.*

Pieņemsim, ka L — valoda alfabētā A, tad $L^c \leftharpoondown A^* \setminus L$ sauc par valodas L *papildinājumu.* Ja L_1, L_2 — valodas, tad $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ un $L_1 \setminus L_2$ attiecīgi sauc par valodu L_1 un L_2 *apvienojumu, šķēlumu* un *starpību.* Kopu

$$L_1 L_2 \leftharpoondown \{uv \mid u \in L_1 \land v \in L_2\}$$

sauc par valodu L_1 un L_2 *reizinājumu.* Ja $u \in A^*$ un L ir valoda alfabētā A, tad

$$uL \leftharpoondown \{u\}L \quad \text{un} \quad L\{u\} \rightharpoondown Lu\,.$$

Valodas L *n-to pakāpi*, kur $n \in \mathbb{N}$, definē induktīvi

$$L^0 \leftharpoondown \lambda, \quad L^{n+1} \leftharpoondown LL^n\,,$$

turklāt parasti lieto šādus apzīmējumus

$$\begin{aligned} L^+ &\rightleftharpoons \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n, \quad u^+ \rightleftharpoons \{u\}^+, \\ L^* &\rightleftharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \{\lambda\} \cup L^+, \quad u^* \rightleftharpoons \{u\}^*. \end{aligned}$$

1.2. ω-vārdi

1.2.1. Definīcija. *Visur definētu attēlojumu $x : \mathbb{N} \to A$ sauc par alfabēta A ω-vārdu.*

Ja neradīsies pārpratumi ω-vārdus sauksim vienkārši par vārdiem. Mēs lietosim šādus apzīmējumus: $x_i \rightleftharpoons x[i] \rightleftharpoons x(i)$, $x \rightleftharpoons (x_i) \rightleftharpoons x_0 x_1 \dots x_n \dots$ Alfabēta A visu ω-vārdu veidoto kopu turpmāk apzīmēsim ar A^ω.

1.2.2. Definīcija. *Alfabēta A ω-vārdu $ux \rightleftharpoons u_1 u_2 \dots u_k x_0 x_1 \dots x_n \dots$ sauc par vārdu $u = u_1 u_2 \dots u_k \in A^*$ un $x \in A^\omega$ konkatenāciju. Vārdu $w \in A^*$ sauc par vārda $x \in A^\omega$ dalītāju, ja eksistē tādi $v \in A^*$ un $y \in A^\omega$, ka $x = vwy$. Šai situācijā vārdu v sauc par priedēkli, bet y — par piedēkli.*

Vārda $x \in A^\omega$ visu dalītāju kopu apzīmēsim ar $\mathrm{F}(x)$, attiecīgi visu priedēkļu kopu — ar $\mathrm{Pref}(x)$, bet visu piedēkļu kopu — ar $\mathrm{Suff}(x)$. Vārda $x \in A^\omega$ dalītāju $x_m x_{m+1} \dots x_n$, $0 \leq m \leq n$, apzīmēsim ar $x[m,n]$ vai $x[m,n+1)$. Vienosimies, ka $x[m,n] \rightleftharpoons \lambda$, ja $m > n$. Gadījumā, ja $m > 0$, tad

$$x(m-1,n+1) \rightleftharpoons x(m-1,n] \rightleftharpoons x[m,n].$$

Savukārt $x(m,n] \rightleftharpoons x[m,n) \rightleftharpoons \lambda$, ja $m \leq n$. Visbeidzot $x(m,n) \rightleftharpoons \lambda$, ja $m \leq n+1$. Piedēkli $x_n x_{n+1} \dots x_{n+i} \dots$ apzīmēsim ar $x[n,\infty)$ vai $x(n+1,\infty)$.

Indeksētu vārdu $x[m,n]$, $m \leq n$, sauc par vārda w *ieeju* vārdā $x \in A^\omega$, ja $w = x[m,n]$. Šādā veidā mēs uzsveram, ka mums ir svarīgs ne tikai pats vārds w, bet arī pāris (m,n), t.i., vārda w atrašanās vieta ω-vārdā x.

Pieņemsim, ka $v \in A^+$, tad ar v^ω apzīmēsim ω-vārdu $v^\omega \rightleftharpoons vv \dots v \dots$ Šo vārdu v^ω sauc par *periodisku vārdu*. Vārdu x sauc par *gandrīz periodisku* vārdu, ja eksistē tādi vārdi $u \in A^*$ un $v \in A^+$, ka $x = uv^\omega$. Šai gadījumā $|v|$ sauc par *periodu*, bet $|u|$ — par *priekšperiodu*.

1.2.3. Lemma. *Katrai bezgalīgai valodai $L \subseteq A^*$ eksistē tāds ω-vārds $x \in A^\omega$, ka $\mathrm{Pref}(x) \subseteq \mathrm{Pref}(L)$.*

□ Vārda $x = x_0 x_1 \dots x_n \dots$ definīcija induktīva. Ņemsim vērā, ka $L \setminus \{\lambda\} \subseteq A^+ = \bigcup_{a \in A} aA^*$, tāpēc

$$L \setminus \{\lambda\} = L \cap A^+ = L \cap (\bigcup_{a \in A} aA^*) = \bigcup_{a \in A} (L \cap aA^*).$$

Tā kā alfabēts A ir galīga kopa, bet L ir bezgalīga kopa, tad saskaņā ar Dirihlē principu eksistē tāds $a_0 \in A$, ka $L \cap a_0 A^*$ ir bezgalīga kopa. Tagad definējam $x_0 \leftharpoondown a_0$ un $L_0 \leftharpoondown L \cap x_0 A^*$.

Induktīvais solis. Pieņemsim, ka nodefinēti burti $x_0, x_1, \ldots, x_k$ un kopa $L_k \leftharpoondown L \cap x_0 x_1 \ldots x_k A^*$, kas ir bezgalīga. Ņemsim vērā, ka

$$\begin{aligned} L_k \setminus \{x_0 x_1 \ldots x_k\} &\subseteq x_0 x_1 \ldots x_k A^+ = \bigcup_{a \in A} x_0 x_1 \ldots x_k a A^*, \qquad \text{tāpēc} \\ L_k \setminus \{x_0 x_1 \ldots x_k\} &= L_k \cap x_0 x_1 \ldots x_k A^+ = L_k \cap (\bigcup_{a \in A} x_0 x_1 \ldots x_k a A^*) \\ &= \bigcup_{a \in A} (L_k \cap x_0 x_1 \ldots x_k a A^*). \end{aligned}$$

Tā kā alfabēts A ir galīga kopa, bet L_k ir bezgalīga kopa, tad saskaņā ar Dirihlē principu eksistē tāds $a_{k+1} \in A$, ka $L_k \cap x_0 x_1 \ldots x_k a_{k+1} A^*$ ir bezgalīga kopa. Tagad definējam $x_{k+1} \leftharpoondown a_{k+1}$ un $L_{k+1} \leftharpoondown L_k \cap x_0 x_1 \ldots x_k x_{k+1} A^* =$ $= L \cap x_0 x_1 \ldots x_k A^* \cap x_0 x_1 \ldots x_k x_{k+1} A^* = L \cap x_0 x_1 \ldots x_k x_{k+1} A^*$.

Indukcijas pāreja veikta pilnībā. ■

1.3. Priedēkļu metrika

Pieņemsim, ka A — alfabēts, tad $A^\infty \leftharpoondown A^* \cup A^\omega$.

1.3.1. Definīcija. *Attēlojumu*

$$d(u,v) \leftharpoondown \begin{cases} \quad 0, & \text{ja} \quad u = v; \\ 2^{-m}, & \text{ja} \quad u \neq v \ \wedge \ m = \max\{\, |w| \mid w \in \mathrm{Pref}(u) \cap \mathrm{Pref}(v)\} \end{cases}$$

sauc par priedēkļu metriku (attālumu) kopā A^∞.

1.3.2. Definīcija. *Morfismu* $\phi : A^* \to B^*$ *sauc par nedzēsošu (nonerasing), ja* $\phi(A^+) \subseteq B^+$.

Pieņemsim, ka K kāda patvaļīgi fiksēta kopa. Attēlojuma $g : K \to K$ iterācijas mēs definējam induktīvi:

(i) $g^0 \leftharpoondown \mathbb{I}$;

(ii) $g^{n+1} \leftharpoondown g g^n$.

Pieņemsim, ka $\phi : A^* \to A^*$ — nedzēsošs morfisms, kam eksistē tāds burts $a \in A$, ka

$$\phi(a) = au\,, \qquad \text{kur} \qquad u \in A^+.$$

No šejienes

$$\phi^{n+1}(a) = \phi^n(au) = \phi^n(a)\phi^n(u)\,,$$

visiem $n \geq 0$. Tādējādi $\phi^n(a)$ ir vārda $\phi^{n+1}(a)$ īsts priedēklis. Līdz ar to virkne $(\phi^n(a))$ konverģē uz robežu, ko apzīmē ar $\phi^\omega(a)$, t.i.,

$$\phi^\omega(a) \leftharpoondown \lim_{n \to \infty} \phi^n(a)\,.$$

Šai gadījumā saka, ka $\phi^\omega(a)$ ir ω–vārds, kas iegūts no burta *a iterējot morfismu* ϕ. Vārdu

$$t \leftrightharpoons 0110\,1001\,1001\,0110\ldots$$

sauc par Tue—Morsa vārdu. Precīzāk, $t \leftrightharpoons \tau^\omega(0)$, kur $\tau : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ ir morfisms, kas definēts ar vienādībām

$$\tau(0) \leftrightharpoons 01,\ \tau(1) \leftrightharpoons 10\,.$$

1.4. Morfismi

1.4.1. Definīcija. *Pieņemsim, ka $\varphi : A \to B^*$ ir visur definēts attēlojums. Šī attēlojuma φ turpinājumu $\varphi : A^\infty \to B^\infty$ sauc par morfismu, ja*

- $\varphi : ua \mapsto \varphi(u)\varphi(a) \quad$ *visiem* $(u,a) \in A^* \times A$;
- $\varphi : (x_i) \mapsto (\varphi(x_i)) \quad$ *visiem* $(x_i) \in A^\omega$.

Atzīmēsim, ka katram visur definētam attēlojumam $\varphi : A \to B^*$ eksistē viens vienīgs turpinājums $\varphi : A^\infty \to B^\infty$, kas ir morfisms. Šī iemesla dēļ turpmāk morfismu $\varphi : A^\infty \to B^\infty$ sauksim par attēlojuma $\varphi : A \to B^*$ *definēto morfismu.*

Morfismu $\varphi : A^\infty \to B^\infty$ sauc par *k–morfismu*, ja tas ir visur definēta attēlojuma $\varphi : A \to B^k$ turpinājums. Attēlojumu $\varphi : A^\infty \to B^\infty$ sauc par *vienmērīgu morfismu*, ja eksistē tāds k, ka šis attēlojums φ ir k–morfisms. 1–morfismu sauc par *literālu morfismu.*

Skaitli

$$|\varphi| \leftrightharpoons \max_{a\in A} |\varphi(a)|$$

sauc par morfisma φ *normu.* Morfismu φ sauc par *k–ierobežotu morfismu*, ja $|\varphi| \le k$.

1.4.2. Apgalvojums. *Katram morfismam $\varphi : A^\infty \to B^\infty$ eksistē tādi morfismi f_1, f_2, g_1, g_2, ka*

(i) f_1, f_2 *ir 1–ierobežoti morfismi;*

(ii) g_1, g_2 *ir nedzēsoši morfismi;*

(iii) *diagramma*

$$\begin{tikzcd}
A^\infty \arrow[r, "g_1"] & B^\infty \\
A^\infty \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "g_2"'] & C^\infty \arrow[u, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

ir komutatīva.

□ Pieņemsim, ka $c \notin A \cup B$. Izvēlamies $C \leftharpoondown A \cup B \cup \{c\}$. Definējam

$$f_1(a) \leftharpoondown \begin{cases} \lambda, & \text{ja } \varphi(a) = \lambda; \\ a, & \text{ja } \varphi(a) \neq \lambda. \end{cases} \qquad g_1(a) \leftharpoondown \begin{cases} \varphi(a), & \text{ja } \varphi(a) \neq \lambda; \\ a, & \text{ja } \varphi(a) = \lambda. \end{cases}$$

$$g_2(a) \leftharpoondown \begin{cases} c, & \text{ja } \varphi(a) = \lambda; \\ \varphi(a), & \text{ja } \varphi(a) \neq \lambda. \end{cases} \qquad f_2(a) \leftharpoondown \begin{cases} \lambda, & \text{ja } a = c; \\ a, & \text{ja } a \neq c. \end{cases}$$ ■

1.5. Biideāli

1.5.1. Definīcija. *Vārdu $x \in A^\omega$ sauc par rekurentu, ja katrs tā dalītājs ieiet tajā bezgalīgi daudz reižu. Vārdu uy, kur $u \in A^*$ un $y \in A^\omega$ sauc par gandrīz rekurentu, ja y ir rekurents vārds.*

Ar $\mathrm{F}^\infty(x)$ apzīmēsim visu to vārda x dalītāju kopu, kuri tajā ieiet bezgalīgi daudz reižu. Faktu, ka vārds ir rekurents var izteikt ar vienādību $\mathrm{F}^\infty(x) = \mathrm{F}(x)$. Pat vairāk, ja vārds $x = uy$ ir gandrīz rekurents un y ir tā rekurents piedēklis, tad $\mathrm{F}^\infty(x) = \mathrm{F}(y)$. Kā secinājums no šī fakta izriet apgalvojums: visiem vārda x rekurentiem piedēkļiem ir vieni un tie paši dalītāji.

1.5.2. Definīcija. *Vārdu virkni $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ sauc par biideālu virkni, ja $\forall i \;\; v_{i+1} \in v_i A^* v_i$.*

1.5.3. Lemma. *Vārdu virkne $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ ir biideālu virkne tad un tikai tad, ja eksistē tāda vārdu virkne $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, ka*

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0, \\ v_{i+1} &= v_i u_{i+1} v_i. \end{aligned}$$

1.5.4. Sekas. *Ja (v_n) ir biideālu virkne, tad*

$$\forall m \leq n \quad v_m \in \mathrm{Pref}(v_n) \cap \mathrm{Suff}(v_n)\,.$$

Pieņemsim, ka mums dota alfabēta A vārdu virkne $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, t.i., $\forall i \; u_i \in A^*$, pie tam $u_0 \neq \lambda$. Vārdu virkni (v_i) definēsim induktīvi:

$$v_0 \leftharpoondown u_0, \qquad v_{i+1} \leftharpoondown v_i u_{i+1} v_i.$$

1.5.5. Definīcija. *Virknes v_i robežu $\lim\limits_{i \to \infty} v_i \rightleftharpoons x$ sauc par biideālu. Šai situācijā saka, ka virkne (u_i) ģenerē biideālu x jeb x ir virknes (u_i) ģenerētais biidāls. Ja $\forall i \; |u_i| \leq l$, tad biideālu x sauc par l–ierobežotu biideālu. Biideālu x sauc par ierobežotu biideālu, ja eksistē tāds skaitlis l, ka x ir l–ierobežots biideāls. Biideālu x sauc par galīgi ģenerētu biideālu, ja*

$$\exists m \, \forall i \, \forall j \; (i \equiv j \pmod{m} \Rightarrow u_i = u_j)\,.$$

Šai situācijā saka, ka kortežs $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ ģenerē biideālu x jeb x ir korteža $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ ģenerētais biideāls. Mēs teiksim, ka x ir m–ģenerēts biideāls, ja eksistē tāds m–dimensionāls kortežs $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$, kas ģenerē biideālu x.

1.5.6. Lemma. *Vārds $x \in A^\omega$ ir rekurents tad un tikai tad, ja tas ir biideāls.*

$\square$ $\Rightarrow$ Pieņemsim, ka vārds x ir rekurents. Virkni (u_i) definēsim induktīvi. Izvēlamies $u_0 \leftharpoondown v_0$ vienādu ar patvaļīgu netukšu vārda x priedēkli. Pieņemsim, ka mēs jau esam konstruējuši v_i visiem $i \leq k$ un tie visi ir x priedēkļi. Tā kā vārds x ir rekurents, tad tajā dalītājs v_k ieiet bezgalīgi daudz reižu, un atradīsies tāda tā ieeja $x[i,j] = v_k$, kas nešķeļas ar priedēkli v_k, tas ir, $i \geq |v_k|$. Izvēlamies $u_{k+1} \leftharpoondown x[|v_k|, i)$, un tādējādi $v_{k+1} = x[0,j]$. Skaidrs, ka x ir virknes (v_i) robeža.

$\Leftarrow$ Pieņemsim, ka x ir biideāls un w ir patvaļīgs tā dalītājs. Tā kā x ir virknes (v_i) robeža, tad eksistē tāds k, ka $w \backslash v_k$. Ar indukciju var viegli parādīt, ka vārds v_{k+l} satur vismaz 2^l vārda v_k dažādu ieeju, un tātad arī vismaz tik pat daudz w ieeju. Tādējādi, x ir rekurents. $\blacksquare$

1.6. Sintaktiskais monoīds

1.6.1. Definīcija. *Kopā K definētu divvietīgu attiecību $E \subseteq K^2$ sauc par:*
(i) *refleksīvu, ja* $\forall x \in K \ (x,x) \in E$;
(ii) *simetrisku, ja* $\forall x \in K \ \forall y \in K \ [\,(x,y) \in E \Rightarrow (y,x) \in E\,]$;
(iii) *antisimetrisku, ja* $\forall x \in K \ \forall y \in K \ [(x,y) \in E \wedge (y,x) \in E \Rightarrow x = y]$;
(iv) *transitīvu, ja* $\forall x \in K \ \forall y \in K \ \forall z \in K$
$[\,(x,y) \in E \wedge (y,z) \in E \Rightarrow (x,z) \in E\,]$.

Kopā K definētu attiecību E sauc par *ekvivalences tipa predikātu*, ja tā ir gan refleksīva, gan simetriska, gan transitīva. Parasti, ja E ir ekvivalences tipa predikāts, tad tā vietā, lai rakstītu $(x,y) \in E$ lieto pierakstu $x \equiv_E y$. Ja no konteksta ir noprotams konkrēts ekvivalences tipa predikāts vai arī tā specifiskās īpašības nav būtiskas, tad pieraksta $x \equiv_E y$ vietā mēdz lietot pierakstu $x \equiv y$.

Pieņemsim, ka L ir valoda alfabētā A. Kopā A^* definējam attiecību $\equiv$:

$$u \equiv v \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall xy \in A^*(xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L).$$

1.6.2. Apgalvojums. *Attiecība $\equiv$ ir kongruence monoīdā $\langle A^*, \# \rangle$.*

$\square$ (i) Vispirms parādīsim, ka $\equiv$ ir ekvivalences tipa predikāts.

- Tā kā
$$\forall xy \in A^*(xuy \in L \Leftrightarrow xuy \in L),$$
tad $u \equiv u$.

- Pieņemsim, ka $u \equiv v$, tad
$$\forall xy \in A^*(xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L).$$
No šejienes
$$\forall xy \in A^*(xvy \in L \Leftrightarrow xuy \in L).$$
Tātad $u \equiv v \Rightarrow v \equiv u$.

- Pieņemsim, ka $u \equiv v$ un $v \equiv w$, tad
$$\forall xy \in A^*(xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$$
un
$$\forall xy \in A^*(xvy \in L \Leftrightarrow xwy \in L).$$
No šejienes
$$\forall xy \in A^*(xuy \in L \Leftrightarrow xwy \in L).$$
Tātad $u \equiv v \ \wedge \ v \equiv w \Rightarrow u \equiv w$.

(ii) Tagad konstatēsim, ka $\equiv$ ir kongruence. Pieņemsim, ka $u \equiv v$, tad
$$\forall xy \in A^*(xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L).$$
No šejienes
$$\forall xy \in A^*(xwuy \in L \Leftrightarrow xwvy \in L)$$
un
$$\forall xy \in A^*(xuwy \in L \Leftrightarrow xvwy \in L),$$
kur $w \in A^*$. Tātad $u \equiv v \ \wedge \ w \in A^* \Rightarrow wu \equiv wv \ \wedge \ uw \equiv vw$. ■

1.6.3. Definīcija. *Monoīdu $A^*/\equiv$ sauc par valodas L sintaktisko monoīdu.*

Parasti šai situācijā lieto apzīmējumu
$$\mathrm{syn}L \leftharpoondown A^*/\equiv .$$

1.6.4. Piemēri. (i) $L_1 \leftharpoondown \{\lambda\}$.

Ja $u \neq \lambda$, tad $\forall xy \in A^*$ $xuy \notin L_1$. No šejienes $\forall uv \in A^+$ $u \equiv v$. Tā rezultātā valodas L_1 sintaktiskā monoīda $\mathrm{syn}L_1$ Kelī tabula ir

.	$[\lambda]$	0
$[\lambda]$	$[\lambda]$	0
0	0	0

Te $[\lambda] \leftharpoondown \{\lambda\}$ un $0 \leftharpoondown A^+$.

(ii) $L_2 \leftharpoondown \{ab\}$, kur $A = \{a, b\}$.

Ja $u \nmid ab$ un $v \nmid ab$, tad $\forall xy \in A^*$ $(xuy \notin L_2 \ \wedge \ xvy \notin L_2)$. Atliek apskatīt visus ab dalītājus, proti,
$$\lambda, a, b, ab.$$

- Ja $\lambda \neq u$, tad $\lambda ab \in L_2$ un $uab \notin L_2$.
- Ja $a \neq u$, tad $ab \in L_2$ un $ub \notin L_2$.
- Ja $b \neq u$, tad $ab \in L_2$ un $au \notin L_2$.

- Ja $ab \neq u$, tad $\lambda ab \in L_2$ un $\lambda u \notin L_2$.

Tas nozīmē, ka $[\lambda] \leftharpoondown\!\!\!= \{x \in A^* \mid \lambda \equiv x\} = \{\lambda\}$, $[a] = \{a\}$, $[b] = \{b\}$, $[ab] = \{ab\}$. Tā rezultātā valodas L_2 sintaktiskā monoīda $\mathrm{syn}L_2$ Kelī tabula ir

$\cdot$	$[\lambda]$	$[a]$	$[b]$	$[ab]$	0
$[\lambda]$	$[\lambda]$	$[a]$	$[b]$	$[ab]$	0
$[a]$	$[a]$	0	$[ab]$	0	0
$[b]$	$[b]$	0	0	0	0
$[ab]$	$[ab]$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Te $0 \leftharpoondown\!\!\!= A^+ \setminus \{a, b, ab\} = A^* \setminus \mathrm{F}(ab)$.

(iii) $L_3 \leftharpoondown\!\!\!= aA^*$, kur $A = \{a, b\}$.

- Ja $a \in \mathrm{Pref}(u) \cap \mathrm{Pref}(v)$, tad $\forall y \in A^*\ (uy \in L_3\ \wedge\ vy \in L_3)$. No šejienes

$$\forall xy \in A^*\ (xuy \in L_3\ \Leftrightarrow\ xvy \in L_3).$$

- Ja $b \in \mathrm{Pref}(u) \cap \mathrm{Pref}(v)$, tad $\forall y \in A^*\ (uy \notin L_3\ \wedge\ vy \notin L_3)$. No šejienes

$$\forall xy \in A^*\ (xuy \in L_3\ \Leftrightarrow\ xvy \in L_3).$$

- Ja $u \in aA^*$, tad $\lambda b \notin L_3$, bet $ub \in L_3$.
  Ja $u \in bA^*$, tad $\lambda a \in L_3$, bet $ua \notin L_3$.

Tā rezultātā valodas L_3 sintaktiskā monoīda $\mathrm{syn}L_3$ Kelī tabula ir

$\cdot$	$[\lambda]$	$[a]$	$[b]$
$[\lambda]$	$[\lambda]$	$[a]$	$[b]$
$[a]$	$[a]$	$[a]$	$[a]$
$[b]$	$[b]$	$[b]$	$[b]$

Te $[\lambda] = \{\lambda\}$, $[a] = aA^*$ un $b = bA^*$.

1.7. Sakārtojums

1.7.1. Definīcija. *Modeli $\langle D, D(\leq)\rangle$ sauc par priekšsakārtojumu kopā D, ja $D(\leq)$ ir kopā D definēts refleksīvs un transitīvs predikāts.*

Līdzīgi kā ekvivalences predikāta gadījumā tā vietā, lai rakstītu $(x, y) \in D(\leq)$, lieto pierakstu $x \leq y$ vai arī $y \geq x$. Parasti šai situācijā saka:
— $\leq$ ir kopas D priekšsakārtojums.
Tikpat labi mēdz arī teikt:
— $\leq$ ir priekšsakārtojums kopā D.
Ļoti bieži priekšsakārtojuma $\langle D, D(\leq)\rangle$ apzīmēšanai lieto pierakstu $\langle D, \leq\rangle$; vēl vairāk, ja nerodas pārpratumi, tad kopu D identificē ar priekšsakārtojumu kopā D, proti, modeli $\langle D, D(\leq)\rangle$.

1.7.2. Piemērs. Kopā A^* attiecība

$$u \preceq v \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |u| \leq |v|$$

definē priekšsakārtojumu. Ja $A = \{0,1\}$, tad $10 \preceq 01 \preceq 101$.

1.7.3. Definīcija. *Kopas D priekšsakārtojumu $\leq$ sauc par kopas D sakārtojumu, ja tas ir antisimetrisks.*

Šai gadījumā kopu D sauc par daļēji sakārtotu kopu (saka arī: "sakārtota kopa"vai "kopā D uzdots (definēts) daļējs sakārtojums $\leq$"). Daļēji sakārtotu kopu gadījumā, ja $x \leq y$ un $x \neq y$, mēdz lietot pierakstu $x < y$.

1.7.4. Piemērs. Attiecība $\subseteq$, t.i, kopa A ir kopas B apakškopa, kopā

$$\mathfrak{P}(X) \leftharpoondown \{A \mid A \subseteq X\}$$

definē daļēju sakārtojumu.

Ja $D_0 \subseteq D$ un $D_0(\leq_0) = D(\leq) \cap D_0^2$, tad $\langle D_0, D_0(\leq_0)\rangle$ arī ir daļēji sakārtota kopa. Šai gadījumā saka, ka kopas D sakārtojums *inducē* kopas D_0 sakārtojumu, un saka, ka $\leq_0$ ir sakārtojuma $\leq$ inducētais sakārtojums. Parasti šādā gadījumā $\leq_0$ apzīmēšanai lieto to pašu pierakstu $\leq$.

1.7.5. Definīcija. *Sakārtotu kopu D sauc par ķēdi (jeb lineāri sakārtotu kopu), ja*

$$\forall x \in D\ \forall y \in D\ (x \leq y \ \vee\ y \leq x).$$

1.7.6. Piemērs. $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ ir lineāri sakārtota kopa. Te

$$0 < 1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

1.7.7. Definīcija. *Pieņemsim, ka $\langle D_1, \preceq_1\rangle$ un $\langle D_2, \preceq_2\rangle$ ir daļēji sakārtotas kopas. Attēlojumu $\nu : D_1 \to D_2$ sauc par izotonu attēlojumu, ja visiem kopas D_1 elementiem x, y izpildās nosacījums:*

$$x \preceq_1 y \Rightarrow \nu(x) \preceq_2 \nu(y).$$

Kopas D_1, D_2 sauc par izomorfām daļēji sakārtotām kopām, ja eksistē tāda bijekcija $\iota : D_1 \to D_2$, ka visiem kopas D_1 elementiem x, y izpildās nosacījums:

$$x \preceq_1 y \Leftrightarrow \iota(x) \preceq_2 \iota(y).$$

1.7.8. Definīcija. *Pieņemsim, ka $\leq$ ir alfabēta A lineārs sakārtojums. Kopas A^* sakārtojumu $\leq_{lex}$ sauc par kopas A^** leksikogrāfiko sakārtojumu, ja

$$u <_{lex} v \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v \in uA^+ \ \vee\ \exists w u' v' \exists (a,b) \in A^2\ (a < b \ \wedge\ u = wau' \ \wedge v = wbv').$$

1.7.9. Piemērs. Pieņemsim, ka $A = \{0, 1\}$ un $0 < 1$, tad

$$0 <_{lex} 01 <_{lex} 10 <_{lex} 110 <_{lex} 111000.$$

Ievērojam, ka

$$0 <_{lex} 0^2 <_{lex} 0^3 <_{lex} \ldots <_{lex} 0^n <_{lex} \ldots <_{lex} 1,$$

t.i., pirms 1 ir bezgala daudz kopas A^* elementu. Šī iemesla dēļ daļēji sakārtotās kopas $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ un $\langle A^*, \leq_{lex} \rangle$ nav izomorfas.

1.7.10. Definīcija. *Pieņemsim, ka $\leq$ ir alfabēta A lineārs sakārtojms. Kopas A^* sakārtojumu $\leq_1$ sauc par alfabētisko sakārtojumu, ja*

$$u <_1 v \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |u| < |v| \ \vee \ (\,|u| = |v| \ \wedge \ u <_{lex} v\,).$$

1.7.11. Sekas. *Ja A ir galīgs alfabēts, tad daļēji sakārtotās kopas $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle A^*, \leq_1 \rangle$ ir izomorfas.*

1.7.12. Definīcija. *Pieņemsim, ka $u = u_0 u_1 \ldots u_n$, kur visi u_j ir alfabēta A burti. Vārdu kortežu*

$$(u^1, u^2, \ldots, u^k)$$

sauc par vārda u k–sadalījumu, ja

$$u^{i+1} \leftharpoondown \begin{cases} \lambda, & ja \quad t \leftharpoondown \left\lfloor \frac{n-i}{k} \right\rfloor < 0; \\ u_i u_{i+k} u_{i+2k} \ldots u_{i+tk}, & ja \quad t \geq 0. \end{cases}$$

1.7.13. Piemērs. Kortežs $(11, 11, 0)$ ir vārda 11011 3 sadalījums.

1.7.14. Definīcija. *Pieņemsim, ka $\leq$ ir alfabēta A lineārs sakārtojms. Kopas A^* sakārtojumu $\leq_k$ sauc par k–alfabētisko sakārtojumu, ja*

$$u <_k v \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u^1 u^2 \ldots u^k <_1 v^1 v^2 \ldots v^k,$$

kur

$$(u^1, u^2, \ldots, u^k) \quad un \quad (v^1, v^2, \ldots, v^k)$$

ir attiecīgi vārdu u un v k–sadalījumi.

1.7.15. Sekas. *Ja A ir galīgs alfabēts, tad jebkuram k daļēji sakārtotās kopas $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle A^*, \leq_k \rangle$ ir izomorfas.*

1.7.16. Piemērs. *Pieņemsim, ka $A = \{0, 1, a, b, c\}$ ir lineāri sakārtots alfabēts: $0 < 1 < a < b < c$, tad*

$$a0a0a0a0 <_2 a1a1b1a1 <_2 a0a0b0b1 <_2 a0a1b1b0 <_2 b0a0b1b1,$$

jo

$$aaaa0000 <_1 aaba1111 <_1 aabb0001 <_1 aabb0110 <_1 babb0011.$$

1.7.17. Definīcija. *Ja $D \subseteq \Delta^*$, tad kopas Δ^* k–alfabētiskais sakārtojums inducē kopas D sakārtojumu, ko sauc par kopas D k–alfabētisko sakārtojumu.*

1.7.18. Sekas. *Ja D ir bezgalīga kopa un $D \subseteq \Delta^*$, tad daļēji sakārtotās kopas $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle D, \leq_k \rangle$ ir izomorfas.*

2. nodaļa

Regulāras valodas

2.1. Regulāras valodas

2.1.1. Definīcija. *Valodu L alfabētā A sauc par regulāru, ja tā apmierina kaut vienu no sekojošiem nosacījumiem:*

(i) $L = \emptyset$;

(ii) $L = \{\lambda\}$;

(iii) $L = \{a\}$, *kur* $a \in A$;

(iv) *ja* L_1 *ir regulāra valoda, tad* $L \rightleftharpoons L_1^*$ *sauc par regulāru valodu;*

(v) *ja* L_1 *un* L_2 *ir regulāras valodas, tad* $L \rightleftharpoons L_1 L_2$ *sauc par regulāru valodu;*

(vi) *ja* L_1 *un* L_2 *ir regulāras valodas, tad* $L \rightleftharpoons L_1 \cup L_2$ *sauc par regulāru valodu.*

2.1.2. Piemēri. *Pieņemsim, ka* $A = \{0, 1\}$.

1. $\emptyset$ *ir regulāra valoda;*
2. λ *ir regulāra valoda;*
3. $\{0\}$ *un* $\{1\}$ *ir regulāras valodas;*
4. $\{0\}^*$ *ir regulāra valoda.*
5. *Tā kā* $A = \{0\} \cup \{1\}$, *tad* A *ir regulāra valoda.*
6. *Tā kā* A *ir regulāra valoda, tad* A^* *ir regulāra valoda.*
7. *Tā kā* $\{0\}$, $\{1\}$ *un* A^* *ir regulāras valodas, tad* $0A^*$ *un* $1A^*$ *ir regulāras valodas.*
8. *Tā kā* $0A^*$ *un* $1A^*$ *ir regulāras valodas, tad* $A^+ = 0A^* \cup 1A^*$ *ir regulāra valoda.*

Parasti lieto ērtāku pierakstu, proti,

$\{a\}$ vietā raksta a;

$\{a\} \cup \{b\}$ vietā raksta $a + b$;

$\{a\}\{b\}$ vietā raksta ab;

$\{a\}^*$ vietā raksta a^*.

Arī mēs, ja neradīsies pārpratumi, lietosim šādu pierakstu. Tā šajos apzīmējumos

$$\begin{aligned} A &= 0 + 1, \\ A^* &= (0+1)^*, \\ 0A^* &= 0(0+1)^*, \\ 1A^* &= 1(0+1)^*, \\ A^+ &= 0(0+1)^* + 1(0+1)^*. \end{aligned}$$

2.2. Automāti

2.2.1. Definīcija. *Divu sugu algebru $\langle Q, A, \circ \rangle$ sauc par poligonu, ja Q, A — galīgas kopas un $\circ$ ir attēlojums $Q \times A \xrightarrow{\circ} Q$.*

Kopas Q elementus sauc par *stāvokļiem*, pašu kopu Q — par *iekšējo stāvokļu* kopu. Kopu A sauc par *ieejas* alfabētu. Attēlojumu $\circ$ sauc par *pārejas* funkciju. Visa šī terminoloģija analoga Milī mašīnu gadījumam. Arī turpmāk īpaši neatrunājot līdzīgās situācijās mēs lietosim šo terminoloģiju.

Mēs lietosim pierakstu

$$q \xrightarrow{a} q',$$

ja $q \circ a = q'$.

Attēlojuma $Q \times A \xrightarrow{\circ} Q$ paplašinājumu kopā $Q \times A^*$ definē induktīvi:

$$q \circ \lambda \leftharpoondown q, \qquad q \circ ua \leftharpoondown (q \circ u) \circ a$$

visiem $(q, u, a) \in Q \times A^* \times A$. Mēs lietosim pierakstu

$$q_1 \xrightarrow{u} q_n,$$

ja $q_1 \circ u = q_n$. Detalizētāk tas izskatās šādi:

$$q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} q_3 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n,$$

pie nosacījuma, ka $u = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ un

$$q_1 \circ a_1 = q_2,\ q_2 \circ a_2 = q_3, \dots, q_{n-1} \circ a_{n-1} = q_n.$$

Šai situācijā mēs teiksim, ka $q_1 \xrightarrow{u} q_n$ ir ceļš ar pazīmi u.

2.2.2. Definīcija. *Divu sugu algebrisku sistēmu $\langle Q, A, q_0, \circ, F\rangle$ sauc par automātu, ja*

(i) $\langle Q, A, \circ\rangle$ — *poligons;*

(ii) $q_0 \in Q$*;*

(iii) $F \subseteq Q$.

Atzīmēsim, ka nosacījumu $F \subseteq Q$ iespējams uztvert kā kopā Q definētu unāru predikātu $\tilde{F}$, proti,

$$\tilde{F}(a) \sim p \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \in F.$$

2.2.3. Definīcija. *Trīs sugu algebru $\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ\rangle$ sauc par nedeterminētu poligonu, ja*

(i) Q, A — *galīgas kopas;*

(ii) $\mathfrak{P}(Q) = \{Q' \,|\, Q' \subseteq Q\}$*;*

(iii) $\circ$ *ir attēlojums* $Q \times A \xrightarrow{\circ} \mathfrak{P}(Q)$.

Mēs lietosim pierakstu

$$q \xrightarrow{a} q',$$

ja $q' \in q \circ a$. Gadījumā ja $u = a_1 a_2 \dots a_n$ un

$$q_2 \in q_1 \circ a_1,\; q_3 \in q_2 \circ a_2, \dots, q_n \in q_{n-1} \circ a_{n-1},$$

mēs lietosim pierakstu

$$q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} q_3 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n \quad \text{vai arī} \quad q_1 \xrightarrow{u} q_n.$$

Šai situācijā mēs teiksim, ka $q_1 \xrightarrow{u} q_n$ ir ceļš ar pazīmi u.

Attēlojums $Q \times A \xrightarrow{\circ} \mathfrak{P}(Q)$ inducē attēlojumu $\mathfrak{P}(Q) \times A^* \xrightarrow{\circ} \mathfrak{P}(Q)$, proti,

$$P \circ \lambda \leftharpoondown P, \quad P \circ a \leftharpoondown \bigcup_{p \in P} (p \circ a), \quad P \circ ua \leftharpoondown (P \circ u) \circ a$$

visiem $(P, u, a) \in \mathfrak{P}(Q) \times A^* \times A$. Turpmāk lietosim pierakstu

$$P \circ u \circ v \leftharpoondown (P \circ u) \circ v.$$

2.2.4. Apgalvojums. $\forall P \in \mathfrak{P}(Q)\; \forall uv \in A^* \;\; P \circ uv = P \circ u \circ v.$

$\square$ Ja $v = \lambda$ vai $v = a$, kur $a \in A$, tad apgalvojums tieši seko no attēlojuma $\mathfrak{P}(Q) \times A^* \xrightarrow{\circ} \mathfrak{P}(Q)$ definīcijas. Turpmākie spriedumi induktīvi, pieņemot, ka vārdam v garumā n apgalvojums ir spēkā.

$$\begin{aligned} P \circ uva &= P \circ uv \circ a = (P \circ u \circ v) \circ a = ((P \circ u) \circ v) \circ a \\ &= (P \circ u) \circ v \circ a = (P \circ u) \circ va = P \circ u \circ va. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.5. Apgalvojums. $\forall p' \in (P \circ u)\ \exists p \in P\ \ p \xrightarrow{u} p'$

$\square$ Pieņemsim, ka $a \in A$, tad $P \circ a = \bigcup_{p \in P}(p \circ a)$. No šejienes, ja $p' \in P \circ a$, tad $\exists p \in P\ \ p' \in p \circ a$, t.i., eksistē ceļš $p \xrightarrow{a} p'$.

Tālākie spriedumi induktīvi, pieņemot, ka vārdiem u garumā n apgalvojums ir spēkā. Pieņemsim, ka

$$p' \in P \circ ua = P \circ u \circ a.$$

Saskaņā ar tikko pierādīto

$$\exists q \in P \circ u\ \ q \xrightarrow{a} p'.$$

Tā kā $q \in P \circ u$, tad balstoties uz indukcijas pieņēmumu secināms

$$\exists p \in P\ \ p \xrightarrow{u} q.$$

Līdz ar to mūsu rīcībā ir ceļš $p \xrightarrow{ua} p'$, kur $p \in P$. $\blacksquare$

Pieņemsim, ka $\mathcal{P}_n = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ \rangle$ ir nedeterminēts poligons, tad

$$\mathcal{P}_d \leftrightharpoons \langle \mathfrak{P}(Q), A, \odot \rangle,$$

kur

$$P \odot a \leftrightharpoons \bigcup_{q \in P}(q \circ a),$$

ir determinēts poligons.

2.2.6. Sekas. $\forall u \in A^*\ \ P \circ u = P \odot u$

$\square$ Ja $a \in A$, tad vienādība $P \circ a = P \odot a$ izriet no $P \circ a$ un $P \odot a$ definīcijām.

Tālākie spriedumi induktīvi, pieņemot, ka vārdiem u garumā n sekas ir spēkā. Pieņemsim, ka

$$P \circ u = P \odot u,$$

tad

$$P \circ ua = (P \circ u) \circ a = (P \circ u) \odot a = (P \odot u) \odot a = P \odot ua. \quad \blacksquare$$

2.2.7. Definīcija. *Trīs sugu algebrisku sistēmu* $\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ, S, F \rangle$ *sauc par nedeterminētu automātu, ja*

(i) $\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ \rangle$ *ir nedeterminēts poligons;*

(ii) $S \subseteq Q$*;*

(iii) $F \subseteq Q$.

Kopu S sauc par *sākuma stāvokļu kopu*, bet F — par *akceptējošo stāvokļu kopu*.

2.2.8. Definīcija. *Trīs sugu algebrisku sistēmu* $\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$ *sauc par avotu ja*

(i) Q, A *ir galīgas kopas;*

(ii) λ *ir tukšais vārds;*

(iii) $\mathfrak{P}(Q) = \{Q' \mid Q' \subseteq Q\}$*;*

(iv) $\circ$ *ir attēlojums* $Q \times \big(A \cup \{\lambda\}\big) \overset{\circ}{\to} \mathfrak{P}(Q)$*;*

(iv) $S \subseteq Q$ *un* $F \subseteq Q$*.*

Līdzīgi kā nedeterminētu automātu gadījumā kopu S sauc par *sākuma stāvokļu kopu*, bet F — par *akceptējošo stāvokļu kopu.*

Attēlojums $Q \times \big(A \cup \{\lambda\}\big) \overset{\circ}{\to} \mathfrak{P}(Q)$ inducē attēlojumu $\mathfrak{P}(Q) \times A^* \overset{\circ}{\to} \mathfrak{P}(Q)$, proti,

$$P \circ \lambda \leftharpoondown\!\!= \bigcup_{p \in P} (p \circ \lambda) \cup P, \quad P \circ a \leftharpoondown\!\!= \bigcup_{p \in P} (p \circ a), \quad P \circ ua \leftharpoondown\!\!= (P \circ u) \circ a$$

visiem $(P, u, a) \in \mathfrak{P}(Q) \times A^* \times A$.

Mēs lietosim pierakstu

$$q \xrightarrow{a} q',$$

ja $q' \in q \circ a$. Gadījumā ja $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ un

$$q_2 \in q_1 \circ a_1,\ q_3 \in q_2 \circ a_2, \ldots, q_n \in q_{n-1} \circ a_{n-1},$$

mēs lietosim pierakstu

$$q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} q_3 \xrightarrow{a_3} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n \quad \text{vai arī} \quad q_1 \xrightarrow{u} q_n.$$

Šai situācijā mēs teiksim, ka $q_1 \xrightarrow{u} q_n$ ir ceļš ar pazīmi u.

2.3. Akceptēšana

2.3.1. Definīcija. *Saka, ka automāts*

$$\mathfrak{A} = \langle Q, A, q_0, \circ, F\rangle$$

akceptē vārdu $u \in A^*$*, ja* $q_0 \circ u \in F$*.*

Stāvokli q_0 sauc par *sākuma stāvokli*, bet kopu F — par *akceptējošo stāvokļu kopu.*

Saka, ka automāts $\mathfrak{A}$ *akceptē valodu* $L \subseteq A^*$, ja tas akceptē katru valodas L vārdu; turklāt, ja $u \notin L$, tad $q_0 \circ u \notin F$. Tas nozīmē, ka

$$u \in L \Leftrightarrow q_0 \circ u \in F.$$

Šai situācijā valodas L apzīmēšanai mēs lietosim pierakstu $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$.

2.3.2. Definīcija. *Saka, ka nedeterminēts automāts*

$$\mathfrak{N} = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ, S, F\rangle$$

akceptē vārdu $u \in A^*$*, ja eksistē tāds ceļš* $q \xrightarrow{u} q'$*, ka* $q \in S$ *un* $q' \in F$*.*

Saka, ka nedeterminēts automāts $\mathfrak{N}$ *akceptē valodu* $L \subseteq A^*$, ja tas akceptē katru valodas L vārdu; turklāt, ja $u \notin L$, tad katram ceļam $q \xrightarrow{u} q'$ stāvoklis $q \notin S$ vai arī $q' \notin F$. Šai situācijā valodas L apzīmēšanai mēs lietosim pierakstu $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$.

2.3.3. Definīcija. *Saka, ka avots*

$$\mathfrak{A} = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$$

akceptē vārdu $u \in A^*$*, ja eksistē tāds ceļš* $q \xrightarrow{v} q'$*, ka*

(i) $v = u$,

(ii) $q \in S$ *un* $q' \in F$*.*

Saka, ka *avots* $\mathfrak{A}$ *akceptē valodu* $L \subseteq A^*$, ja tas akceptē katru valodas L vārdu; turklāt tas neakceptē nevienu valodas L^c vārdu, proti, ja $q \xrightarrow{v} q'$ ir ceļš ar pazīmi v un $v = u \in L^c$, tad $q \notin S$ vai $q' \notin F$. Šai situācijā valodas L apzīmēšanai mēs lietosim pierakstu $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$.

2.4. Pseidografi

2.4.1. Definīcija. *Divu sugu algebru* $G = \langle V, E, s, t\rangle$ *sauc par pseidografu, ja*

(i) V *— netukša kopa;*

(ii) s *un* t *ir attēlojumi:* $E \xrightarrow{s} V$, $E \xrightarrow{t} V$.

Kopas V elementus sauc par pseidografa G *virsotnēm*; kopas E elementus — par *lokiem*. Ja kopas V un E ir galīgas , tad pseidografu G sauc par *galīgu pseidografu*. Attēlu $s(l)$ sauc par loka $l \in E$ *izeju*, $t(l)$ — par *ieeju*. Lokus l_1 un l_2 sauc par *paralēliem lokiem*, ja

$$s(l_1) = s(l_2) \qquad \text{un} \qquad t(l_1) = t(l_2).$$

Mēs sakam, ka loks l ir *incidents* virsotnei v, ja $s(l) = v$ vai $t(l) = v$.

Kortežu $c = (v_0, l_0, v_1, l_1, \ldots, l_n, v_{n+1})$ sauc par *ceļu*, ja

- $\forall i \in \overline{0, n+1} \quad v_i \in V$;
- $\forall j \in \overline{0, n} \quad l_j \in E$;
- $\forall j \in \overline{0, n} \quad [s(l_j) = v_j \wedge t(l_j) \in v_{j+1}]$.

Virsotni v_0 sauc par *ceļa sākuma punktu*, v_{n+1} — par *ceļa galapunktu*. Skaitli $n+1$ sauc par *ceļa garumu*. Ceļu

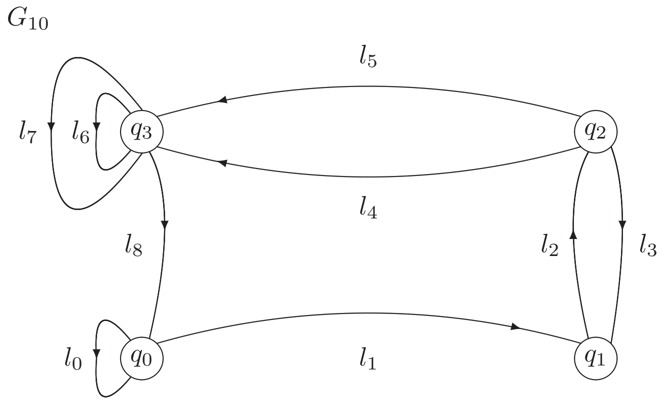
$$(v_i, l_i, \ldots, l_j, v_j), \quad 0 \le i < j \le n+1$$

sauc par ceļa c *posmu*. Ceļu, kura visas virsotnes ir dažādas, sauc par *vienkāršu ceļu*. Ceļu c sauc par *kontūru*, ja $v_0 = v_{n+1}$. Kontūru c sauc par *vienkāršu kontūru*, ja

$$\forall i \in \overline{0,n}\ \forall j \in \overline{0,n} \quad [i \ne j \Rightarrow v_i \ne v_j].$$

Ievērojam, vienkāršs kontūrs nav vienkāršs ceļš. Kontūru garumā 1 sauc par *cilpu*.

Pseidografu uzskatāmi var reprezentēt ar diagrammu plaknē: virsotnes attēlo ar punktiem (aplīšiem), lokus attēlo ar nogriežņiem (nepārtrauktām līknēm). Ja loka l izeja ir virsotne v, ieeja — virsotne v', tad līkne l savieno aplīti v ar aplīti v', turklāt līknei l piešķir orientāciju (parasti ar bultiņu) no aplīša v uz aplīti v'. Konkrēta pseidografa G_{10} piemēru skatīt 2.1. zīmējumā.



2.1. zīm.: Pseidografs.

Te $(q_0, l_1, q_1, l_2, q_2, l_4, q_3, l_7, q_3, l_8, q_0)$ ir kontūrs, taču šis kontūrs nav vienkāršs. Vienkārša kontūra piemērs ir

$$(q_0, l_1, q_1, l_2, q_2, l_4, q_3, l_8, q_0),$$

taču tas nav vienkāršs ceļš. Vienkārša ceļa piemērs ir ceļš

$$(q_0, l_1, q_1, l_2, q_2, l_4, q_3).$$

Pseidografa G_{10} loki l_4 un l_5 ir paralēli, taču loki l_2, l_3 nav paralēli. Kontūrs (q_3, l_7, q_3) ir cilpa.

2.4.2. Definīcija. *Trīs sugu algebru $\langle V, E, A, s, t, \iota\rangle$ sauc par iezīmētu pseidografu, ja*

(i) $\langle V, E, s, t\rangle$ — *pseidografs;*

(ii) ι *ir attēlojums:* $E \xrightarrow{\iota} A$.

Attēlu $\iota(l)$ sauc par loka $l \in E$ *pazīmi.*

2.5. Poligona grafiska reprezentācija

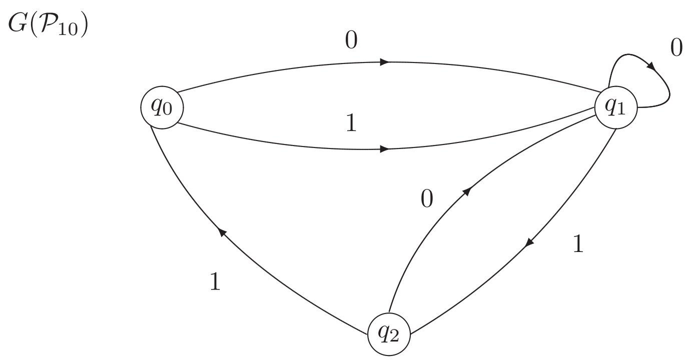
Poligonu var reprezentēt ar iezīmētu pseidografu. Pieņemsim, ka $\mathcal{P} = \langle Q, A, \circ\rangle$ ir poligons, tad atbilstošo pseidografu $G(\mathcal{P}) \leftharpoondown\!= \langle Q, E, A, s, t, \iota\rangle$ definē šādi:

- $E \leftharpoondown\!= \{(q, a, q') \,|\, q \circ a = q'\}$;
- $s(q, a, q') \leftharpoondown\!= q,\ t(q, a, q') \leftharpoondown\!= q',\ \iota(q, a, q') \leftharpoondown\!= a.$

Šo reprezentāciju (t.i., iezīmēto pseidografu $G(\mathcal{P})$) sauc par *poligona diagrammu.* Tā, piemēram, ja $\mathcal{P}_{10} = \langle Q, A, \circ\rangle$ ir poligons, kur

- $Q \leftharpoondown\!= \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $A \leftharpoondown\!= \{0, 1\}$;
- $(q_0, 0) \overset{\circ}{\mapsto} q_1, \quad (q_0, 1) \overset{\circ}{\mapsto} q_1,$
  $(q_1, 0) \overset{\circ}{\mapsto} q_1, \quad (q_1, 1) \overset{\circ}{\mapsto} q_2,$
  $(q_2, 0) \overset{\circ}{\mapsto} q_1, \quad (q_2, 1) \overset{\circ}{\mapsto} q_0,$

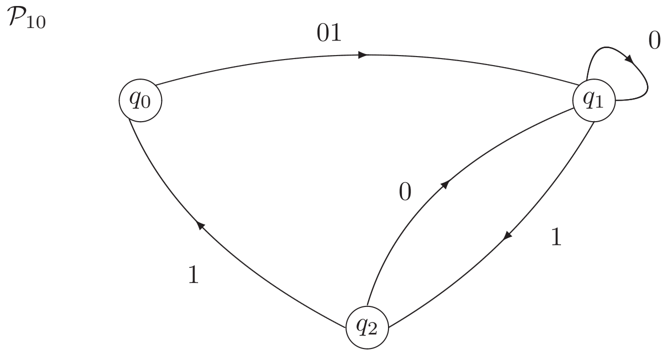
tad šī poligona diagramma izskatās šādi:



2.2. zīm.: Poligona $\mathcal{P}_{10}$ diagramma.

Turpmāk, lai nasarežģītu apzīmējumus, mēs gan poligonu, gan tā diagrammu apzīmēsim ar vienu un to pašu burtu, un parasti poligona diagrammu sauksim par poligonu. Tas nozīmē, ka poligona uzdošanas veidu mēs identificēsim ar pašu poligonu.

Parasti zīmējumā poligona diagrammu paralēlos lokus reprezentē ar vienu līkni, tikai šai līknei pieraksta vairākas pazīmes. Saskaņā ar šo norunu poligons $\mathcal{P}_{10}$ izskatās šādi:



2.3. zīm.: Poligons $\mathcal{P}_{10}$.

Līdzīgi definē nedeterminēta poligona diagrammu.

2.5.1. Definīcija. *Iezīmētu pseidografu $\langle Q, E, A, s, t, \iota\rangle$ sauc par nedeterminēta poligona $\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ\rangle$ diagrammu, ja*

- $E \leftharpoondown\!\!= \{(q, a, q') \,|\, q' \in q \circ a\}$;
- $s(q, a, q') \leftharpoondown\!\!= q,\ t(q, a, q') \leftharpoondown\!\!= q',\ \iota(q, a, q') \leftharpoondown\!\!= a.$

Atzīmēsim, ja

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} q_n$$

ir ceļš ar pazīmi $a_1a_2 \ldots a_n$, tad šim ceļam viennozīmīgi atbilst poligona diagrammas ceļš

$$(q_0, (q_0, a_1, q_1), q_1, (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n), q_n);$$

un otrādi, katram poligona diagrammas ceļam

$$(p_0, (p_0, b_1, p_1), p_1, (p_1, b_2, p_2), \ldots, (p_{k-1}, b_k, p_k), p_k)$$

viennozīmīgi atbilst ceļš

$$p_0 \xrightarrow{b_1} p_1 \xrightarrow{b_2} \ldots \xrightarrow{b_k} p_k$$

ar pazīmi $b_1b_2 \ldots b_k$. Šī iemesla dēļ turpmāk ceļu

$$(p_0, (p_0, b_1, p_1), p_1, (p_1, b_2, p_2), \ldots, (p_{k-1}, b_k, p_k), p_k)$$

mēs arī sauksim par ceļu ar pazīmi $b_1 b_2 \ldots b_k$, un tam lietosim pierakstu

$$p_0 \xrightarrow{b_1} p_1 \xrightarrow{b_2} \ldots \xrightarrow{b_k} p_k.$$

2.6. Automāta grafiska reprezentācija

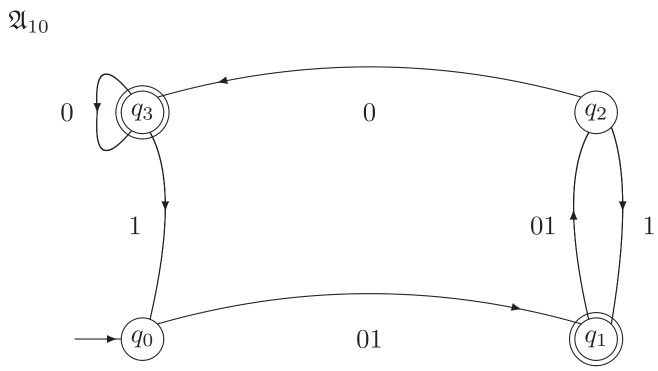
Līdzīgi kā poligonu automātu var reprezentēt ar iezīmētu pseidografu, ko sauc par automāta diagrammu. Vienīgā problēma šai gadījumā: kā uzskatāmi uzdot sākuma stāvokli un akceptējošo stāvokļu kopu. Formāli par *automāta* $\mathfrak{A} = \langle Q, A, q_0, \circ, F\rangle$ *diagrammu* sauc algebrisku sistēmu

$$G(\mathfrak{A}) \leftrightharpoons \langle Q, E, A, s, t, \iota, q_0, F\rangle,$$

kur $\langle Q, E, A, s, t, \iota\rangle$ — poligona $\langle Q, A, \circ\rangle$ diagramma. Uzskatāmībai zīmējumā sākuma stāvokli norāda ar ieejošu bultu, bet akceptējošās kopas F stāvokļus attēlo ar diviem aplīšiem. Pārējās vienošanās paliek tādas pašas kā zīmējot poligona diagrammu. Tā, piemēram, ja $\mathfrak{A}_{10} = \langle Q, A, q_0, \circ, F\rangle$ ir automāts, kur

- $Q \leftrightharpoons \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F \leftrightharpoons \{q_1, q_3\}$;
- $A \leftrightharpoons \{0, 1\}$;
- $(q_0, 0) \overset{\circ}{\mapsto} q_1, \quad (q_0, 1) \overset{\circ}{\mapsto} q_1,$
  $(q_1, 0) \overset{\circ}{\mapsto} q_2, \quad (q_1, 1) \overset{\circ}{\mapsto} q_2,$
  $(q_2, 0) \overset{\circ}{\mapsto} q_3, \quad (q_2, 1) \overset{\circ}{\mapsto} q_1,$
  $(q_3, 0) \overset{\circ}{\mapsto} q_3, \quad (q_3, 1) \overset{\circ}{\mapsto} q_0,$

tad šī automāta diagramma izskatās šādi:



2.4. zīm.: Automāts $\mathfrak{A}_{10}$.

Diagrammas daudziem liekas uzskatāmākas par formālām automātu definīcijām, jo tās ļauj ejot pa atbilstošiem lokiem izsekot automāta darbam ar doto iejas vārdu.

2.6.1. Definīcija. *Algebrisku sistēmu $\langle Q, E, A, s, t, \iota, S, F\rangle$ sauc par nedeterminēta automāta $\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A; \circ, S, F\rangle$ diagrammu, ja $\langle Q, E, A, s, t, \iota\rangle$ ir nedeterminēta poligona $\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ\rangle$ diagramma.*

Līdzīgi, algebrisku sistēmu $\langle Q, E, A \cup \{\lambda\}; s, t, \iota, S, F\rangle$ sauc par *avota*

$$\langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$$

diagrammu, ja

- $E \leftharpoondown\!= \{(q, a, q') \,|\, a \in A \cup \{\lambda\} \,\&\, q' \in q \circ a\}$;
- $s(q, a, q') \leftharpoondown\!= q,\ t(q, a, q') \leftharpoondown\!= q',\ \iota(q, a, q') \leftharpoondown\!= a.$

Avota gadījumā vienojas cilpas ar pazīmi λ nezīmēt. Tā, piemēram, ja $\mathfrak{A}^{10}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A; \circ, S, F\rangle$ ir avots, kur

- $Q \leftharpoondown\!= \{q_0, q_1, q_2, q_3\},\ S \leftharpoondown\!= \{q_0, q_1\},\ F \leftharpoondown\!= \{q_1, q_3\}$;
- $A \leftharpoondown\!= \{0, 1\}$;
- $$\begin{array}{lll} (q_0,0) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_1\}, & (q_0,1) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_1\}, & (q_0,\lambda) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_0\}, \\ (q_1,0) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_2\}, & (q_1,1) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_2\}, & (q_1,\lambda) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_1\}, \\ (q_2,0) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_3\}, & (q_2,1) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_1\}, & (q_2,\lambda) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_2\}, \\ (q_3,0) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_2,q_3\}, & (q_3,1) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_0\}, & (q_3,\lambda) \overset{\circ}{\mapsto} \{q_2,q_3\}, \end{array}$$

tad šī avota diagramma redzama 2.5. zīmējumā.

2.7. Avoti bez neitrāliem kontūriem

2.7.1. Definīcija. *Avota diagrammas ceļu*

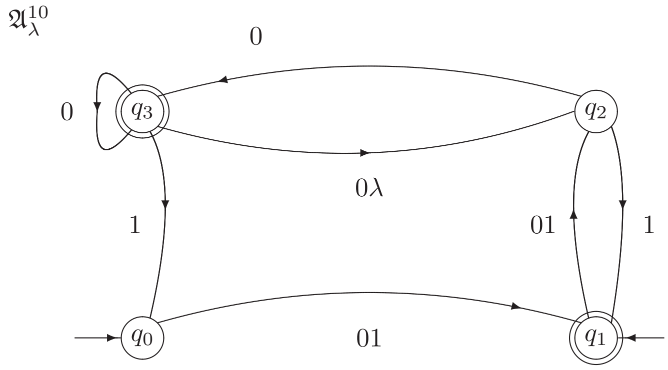
$$(q_0, l_0, q_1, l_1, \ldots, l_{n-1}, q_n, l_n, q_{n+1})$$

sauc par neitrālu ceļu, ja šī ceļa visu loku pazīmes ir λ.

Šo ceļu sauc par *abpusēji neitrālu ceļu*, ja eksistē neitrāls ceļš

$$(q_{n+1}, l'_n, q_n, l'_{n-1}, \ldots, l'_1, q_1, l'_0, q_0).$$

Avotu sauc par *avotu bez neitrāliem kontūriem*, ja tā diagrammas vienīgie vienkāršie neitrālie kontūri ir garumā 1. Avots $\mathfrak{A}^{10}_\lambda$ (2.5. zīm.) ir avots bez neitrāliem kontūriem.



2.5. zīm.: Avots $\mathfrak{A}_\lambda^{10}$.

2.7.2. Lemma. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds avots $\mathfrak{A}_0$, ka visi tā neitrālie kontūri ir abpusēji un*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_0).$$

□ Pieņemsim, ka avota $\mathfrak{A}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$ diagramma ir

$$\langle Q, E, A \cup \{\lambda\}; s, t, \iota, S, F\rangle.$$

Mūsu konstrukcija būs induktīva. Pieņemsim, ka

$$(q_0, l_0, q_1, l_1, \ldots, l_{n-1}, q_n, l_n, q_{n+1})$$

ir avota $\mathfrak{A}_\lambda$ diagrammas neitrāls kontūrs, kas nav abpusēje. Tas nozīmē (2.6.a. zīm.), ka eksistē tāds i, ka visiem lokiem l izpildās nosacījums:

$$\text{ja} \quad s(l) = q_i \text{ un } t(l) = q_{i-1}, \quad \text{tad} \quad \iota(l) \neq \lambda.$$

Avotu $\mathfrak{A}_1$ mēs definējam pievienojot avota $\mathfrak{A}_\lambda$ diagrammai vienu jaunu loku l_i' ar izeju q_i, ieeju q_{i-1} un pazīmi λ (2.6.b. zīm.).

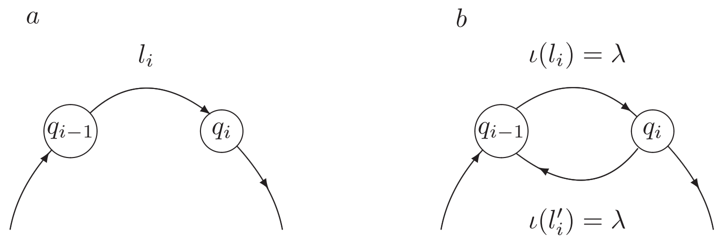
Formāli $\mathfrak{A}_1 \leftharpoondown \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \odot, S, F\rangle$, kur

$$q \odot a \leftharpoondown \begin{cases} \{q_{i-1}\} \cup q_i \circ e, \text{ ja } q = q_i \text{ un } a = \lambda; \\ \qquad\qquad q \circ a, \text{ pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Fakts, ka $\mathfrak{A}_1$ diagramma iegūta no $\mathfrak{A}_\lambda$ diagrammas ar jauna loka pievienošanu, ļauj secināt: $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1)$.

Tagad pieņemsim, ka $q \in S$, $q' \in F$ un

$$q \xrightarrow{u} q_i \xrightarrow{\lambda} q_{i-1} \xrightarrow{u'} q', \tag{2.1}$$



2.6. zīm.: Avota $\mathfrak{A}_1$ konstrukcija.

proti, $u\lambda u' \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1)$. Turklāt, pieņemsim, ka ceļš $q \xrightarrow{u} q_i$ nesatur posmu $q_i \xrightarrow{e} q_{i-1}$.

Tagad ceļa (2.1) posmu $q_i \xrightarrow{\lambda} q_{i-1}$ aizstājam ar ceļu

$$q_i \xrightarrow{\lambda} q_{i+1} \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} q_{n+1} \xrightarrow{\lambda} q_1 \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} q_{i-1},$$

ko īsuma labad apzīmēsim tā: $q_i \underset{\circ}{\xrightarrow{\lambda^n}} q_{i-1}$. Esam ieguvuši jaunu ceļu

$$q \xrightarrow{u} q_i \underset{\circ}{\xrightarrow{\lambda^n}} q_{i-1} \xrightarrow{u'} q'. \tag{2.2}$$

Tā rezultātā $u\lambda^n u' \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1)$, un ceļš (2.2) satur par vienu posmu $q_i \xrightarrow{\lambda} q_{i-1}$ mazāk nekā ceļš (2.1).

Tikko aprakstītā aizvietošanas procedūra definē attēlojumu:

$$\mathcal{T} : \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1) \to \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1) : v \mapsto \mathcal{T}(v).$$

Mūsu gadījumā tas izskatās šādi: $\mathcal{T}(u\lambda u') = u\lambda^n u'$, un $u\lambda u' = u\lambda^n u'$. Līdz ar to

$$\forall k \quad v = \mathcal{T}^k(v).$$

Pieņemsim, ka $w \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1)$, tad eksistē tāds $p \in S$, $p' \in T$ un pazīme w', ka

$$p \xrightarrow{w'} p' \quad \text{un} \quad w' = w.$$

Ja ceļš $p \xrightarrow{w'} p'$ satur k posmus izskatā $q_i \xrightarrow{\lambda} q_{i-1}$, tad $\mathcal{T}^k(w')$ vispār nesatur posmus izskatā $q_i \xrightarrow{\lambda} q_{i-1}$. Tā rezultātā

$$w = w' = \mathcal{T}^k(w') \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda).$$

Esam parādījuši, ka $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda)$.

Visu savelkot kopā secināms: $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda)$. Tātad $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1)$.

Gadījumā, ja avota $\mathfrak{A}_1$ visi neitrālie kontūri ir abpusēji, tad par $\mathfrak{A}_0$ ņemam $\mathfrak{A}_1$. Pretējā gadījumā atkārtojam iepriekš aprakstīto konstrukciju, tikai avota $\mathfrak{A}_\lambda$ lomai tagad izvēlamies avotu $\mathfrak{A}_1$. Tā rezultātā mēs iegūstam avotu virkni

$$\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \tag{2.3}$$

Ievērojam, ka avota $\mathfrak{A}_\lambda$ diagrammai ir galīgs virsotņu un loku skaits, tāpēc avotu virkne (2.3) ir galīga. Teiksim, tās pēdējais loceklis ir $\mathfrak{A}_\nu$. Tagad par $\mathfrak{A}_0$ ņemam $\mathfrak{A}_\nu$. ■

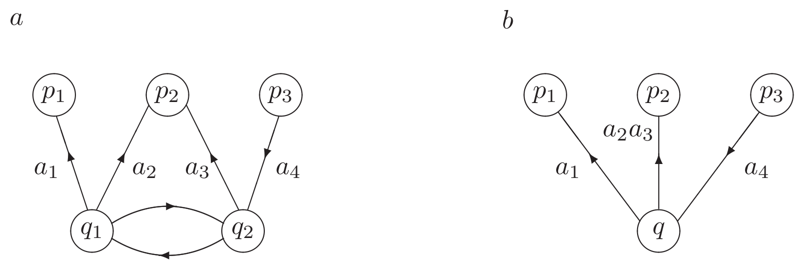
2.7.3. Teorēma. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds avots $\mathfrak{A}_0$ bez neitrāliem kontūriem, ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_0).$$

□ Ņemot vērā Lemmu 2.7.2 varam pieņemt, ka $\mathfrak{A}_\lambda$ ir avots, kura visi neitrālie kontūri ir abpusēji. Pieņemsim, ka avota $\mathfrak{A}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$ diagramma ir

$$\langle Q, E, A \cup \{\lambda\}; s, t, \iota, S, F\rangle.$$

Mūsu konstrukcija būs induktīva. Mēs to sauksim par stāvokļu sapludināšanu. Pieņemsim, ka $q_1 \xrightarrow{\lambda} q_2 \xrightarrow{\lambda} q_1$ ir avota $\mathfrak{A}_\lambda$ diagrammas neitrāls kontūrs (2.7.a. zīm.). Avotu $\mathfrak{A}_1$ mēs definējam sapludinot stāvokļus q_1, q_2 (2.7.b. zīm.).



2.7. zīm.: Stāvokļu sapludināšana.

Formāli $\mathfrak{A}_1 \leftrightharpoons \langle Q_1, \mathfrak{P}(Q_1), A \cup \{\lambda\}; \odot, S_1, F_1\rangle$, kur

$$Q_1 \leftrightharpoons \{q\} \cup (Q \setminus \{q_1, q_2\}); \quad \text{te} \quad q \notin Q.$$

Attēlojuma $Q_1 \times A \cup \{\lambda\} \xrightarrow{\odot} \mathfrak{P}(Q_1)$ definēšanai mums nepieciešams attēlojums $\tau : Q \to Q_1$.

$$\tau(p) \leftrightharpoons \begin{cases} p, & \text{ja } p \notin \{q_1, q_2\}; \\ q, & \text{ja } p \in \{q_1, q_2\}. \end{cases}$$

Atbilstoši, ja $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{P}(Q)$, tad $\tau(\mathfrak{Q}) \leftrightharpoons \{\tau(p) \mid p \in \mathfrak{Q}\}$.

- $$p \odot a \leftharpoondown \begin{cases} \tau(p \circ a), & \text{ja } p \notin \{q_1, q_2\}; \\ \tau(q_1 \circ a) \cup \tau(q_2 \circ a), & \text{ja } p \in \{q_1, q_2\}. \end{cases}$$

- $S_1 \leftharpoondown \tau(S), \quad F_1 \leftharpoondown \tau(F)$.

(i) Pieņemsim, ka $q' \xrightarrow{u} q''$, kur $q' \in S$ un $q'' \in F$. Šai ceļā gan katru virsotni q_1, gan katru virsotni q_2 aizstājam ar virsotni q. Tā, piemēram, ceļa posms

$$p_1 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{c} p_2 \quad \text{aizstājams ar} \quad p_1 \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q \xrightarrow{c} p_2.$$

Šādas aizstāšanas rezultātā esam ieguvuši avota $\mathfrak{A}_1$ diagrammas ceļu ar pazīmi u. Tātad arī $\mathfrak{A}_1$ akceptē vārdu u.

(ii) Nedaudz sarežģītāk pamatot, ka katru avota $\mathfrak{A}_1$ akceptēto vārdu akceptē arī $\mathfrak{A}_\lambda$. Pieņemsim, ka avots $\mathfrak{A}_1$ akceptē vārdu u, tad eksistē tāds ceļš $q' \xrightarrow{u} q''$, ka $q' \in S_1$ un $q'' \in F_1$. Šai gadījumā jāizšķiras, kā aizvietojams ceļa posms $p_1 \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} p_2$.

Saskaņā ar attēlojuma $\odot$ definīciju

$$\begin{aligned} q_1 \in p_1 \circ a \quad &\text{vai} \quad q_2 \in p_1 \circ a, \\ p_2 \in q_1 \circ b \quad &\text{vai} \quad p_2 \in q_2 \circ b. \end{aligned}$$

Ņemot vērā šo informāciju, mēs posmu $p_1 \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} p_2$ aizstājam ar ceļu

$$p_1 \xrightarrow{a} q_i \xrightarrow{\lambda} q_j \xrightarrow{b} p_2;$$

te $q_i, q_j \in \{q_1, q_2\}$.

(iii) Gadījumā, ja avots $\mathfrak{A}_1$ ir bez neitrāliem kontūriem, par $\mathfrak{A}_0$ izvēlamies $\mathfrak{A}_1$. Pretējā gadījumā turpinam stāvokļu sapludināšanu līdz iegūstam avotu bez neitrāliem kontūriem. ∎

2.8. Avoti bez neitrāla starta un finiša

Avota diagrammas neitrālu ceļu sauc par *vienkāršu neitrālu ceļu*, ja tas ir vienkāršs ceļš.

2.8.1. Definīcija. *Avotu sauc par avotu bez neitrāla starta, ja šī avota diagramma nesatur vienkāršu neitrālu ceļu, kuru sākuma punkts pieder avota sākuma stāvokļu kopai, bet galapunkts nepieder avota sākuma stāvokļu kopai.*

2.8.2. Apgalvojums. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds avots $\mathfrak{A}_0$ bez neitrāla starta, ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_0).$$

□ Pieņemsim. ka $\mathfrak{A}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$, tad

$$\mathfrak{A}_0 \leftrightharpoons \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S_0, F\rangle,$$

kur

$$S_0 \leftrightharpoons \{q' \mid \exists q \in S\ \exists n\ q \xrightarrow{\lambda^n} q'\}. \quad \blacksquare$$

2.8.3. Definīcija. *Avotu sauc par avotu bez neitrāla finiša, ja šī avota diagramma nesatur vienkāršu neitrālu ceļu, kuru galapunkts pieder avota akceptējošo stāvokļu kopai, bet sākuma punkts nepieder akceptējošo stāvokļu kopai.*

2.8.4. Apgalvojums. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds avots $\mathfrak{A}_0$ bez neitrāla finiša, ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_0).$$

□ Pieņemsim, ka $\mathfrak{A}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$, tad

$$\mathfrak{A}_0 \leftrightharpoons \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F_0\rangle,$$

kur

$$F_0 \leftrightharpoons \{q' \mid \exists q \in F\ \exists n\ q' \xrightarrow{\lambda^n} q\}. \quad \blacksquare$$

2.8.5. Definīcija. *Avotu sauc par avotu bez neitrāla starta un finiša, ja tas ir gan avots bez neitrāla starta, gan avots bez neitrāla finiša.*

2.8.6. Sekas. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds avots $\mathfrak{A}_0$ bez neitrāla starta un finiša, ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_0).$$

□ Apgalvojums 2.8.2 un 2.8.4. ■

2.9. Avoti bez neitrāliem lokiem

Avota diagrammas vienkāršu neitrālu ceļu garumā 1 sauc par *neitrālu loku*, savukārt neitrālu kontūru garumā 1 sauc par *neitrālu cilpu.*

2.9.1. Definīcija. *Avotu sauc par avotu bez neitrāliem lokiem, ja tā diagramma nesatur neitrālus lokus.*

2.9.2. Apgalvojums. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tādsd avots $\mathfrak{A}_0$ bez neitrāliem lokiem, ka*

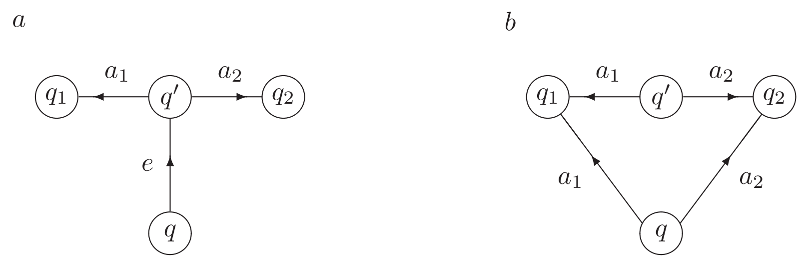
$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_0).$$

□ Ņemot vērā Teorēmu 2.7.3 un Sekas 2.8.6 varam pieņemt, ka avots

$$\mathfrak{A}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$$

ir gan bez neitrāliem kontūriem, gan bez neitrāla starta un finiša.

Mūsu konstrukcija būs induktīva. Mēs to sauksim par neitrālā loka aizvietošanu. Pieņemsim, ka $q \xrightarrow{\lambda} q'$ ir avota $\mathfrak{A}_\lambda$ diagrammas neitrāls loks un $q' \circ \lambda = \{q'\}$ (2.8.a. zīm.), t.i., no virsotnes q' neiziet neviens neitrāls loks. Tā kā $\mathfrak{A}_\lambda$ ir avots bez neitrāliem kontūriem, tad šāda virsotne q' eksistē. Pretējā gadījumā $\mathfrak{A}_\lambda$ ir bez neitrāliem lokiem, un par $\mathfrak{A}_0$ var izvēlēties $\mathfrak{A}_\lambda$. Avotu $\mathfrak{A}_1$ mēs definējam aizvietojot neitrālo loku $q \xrightarrow{\lambda} q'$ (2.8.b. zīm.).



2.8. zīm.: Neitrāla loka aizvietošana.

Formāli $\mathfrak{A}_1 \rightleftharpoons \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \odot, S, F\rangle$, kur

$$p \odot a \rightleftharpoons \begin{cases} p \circ a, & \text{ja } p \neq q; \\ (q \circ a) \cup (q' \circ a), & \text{ja } p = q \text{ un } a \neq \lambda; \\ (q \circ \lambda) \setminus \{q'\}, & \text{ja } p = q \text{ un } a = \lambda. \end{cases}$$

Avota $\mathfrak{A}_1$ diagramma satur par vienu neitrālo loku mazāk nekā avota $\mathfrak{A}_\lambda$ diagramma, turklāt $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_1)$. Gadījumā, ja avots $\mathfrak{A}_1$ ir bez neitrāliem lokiem, par $\mathfrak{A}_0$ izvēlamies $\mathfrak{A}_1$. Pretējā gadījumā turpinam neitrālo loku aizvietošanu līdz iegūstam avotu bez neitrāliem lokiem. ■

2.9.3. Sekas. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds nedeterminēts automāts $\mathfrak{N}$, ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{N}).$$

□ Ņemot vērā tikko pierādīto apgalvojumu secināms: eksistē tāds avots

$$\mathfrak{A}_0 = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, S, F\rangle$$

bez neitrāliem lokiem, ka

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}_0).$$

Atliek avota $\mathfrak{A}_0$ diagrammai atmest visas neitrālās cilpas un esam ieguvuši kāda nedeterminēta automāta $\mathfrak{N}$ diagrammu, turklāt

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_0) = \mathcal{L}(\mathfrak{N}).$$

Formāli

$$\mathfrak{N} \rightleftharpoons \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A; \odot, S, F\rangle,$$

kur

$$\forall a \in A \; q \odot a \rightleftharpoons q \circ a. \qquad ■$$

2.10. Nedeterminēti automāti ar sākuma stāvokli

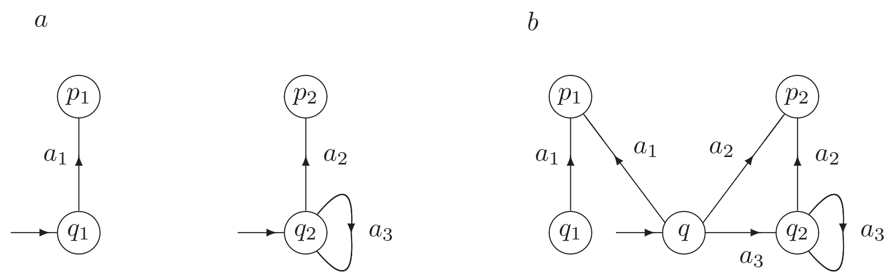
2.10.1. Definīcija. *Nedeterminētu automātu*

$$\mathfrak{N} = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ, S, F \rangle$$

sauc par nedeterminētu automātu ar sākuma stāvokli, ja $|S| = 1$.

2.10.2. Apgalvojums. *Katram nedeterminētam automātam* $\mathfrak{N}$ *eksistē tāds nedeterminēts automāts* $\mathfrak{N}_0$ *ar sākuma stāvokli, ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{N}) = \mathcal{L}(\mathfrak{N}_0).$$



2.9. zīm.: Sākuma stāvokļa ieviešana.

□ Pieņemsim, ka

$$\mathfrak{N} \leftharpoondown\!= \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ, S, F \rangle,$$

ir nedeterminēts automāts, kam $|S| > 1$. Piemēru skatīt 2.9.a. zīm. (te ilustrēts tikai nedeterminētā automāta $\mathfrak{N}$ diagrammas fragments). Izvēlamies kādu elementu $q \notin Q$ un definējam nedeterminētu automātu

$$\mathfrak{N}_0 \leftharpoondown\!= \langle Q_0, \mathfrak{P}(Q_0), A, \odot, \{q\}, F \rangle,$$

kur

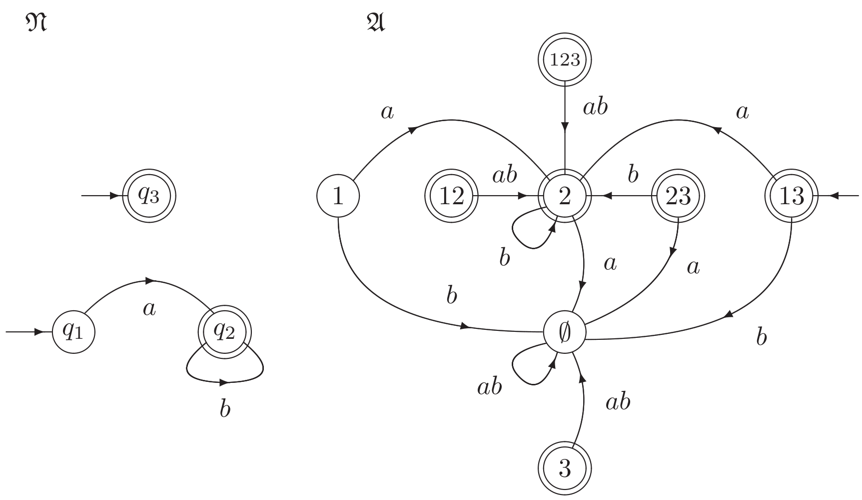
- $Q_0 \leftharpoondown\!= Q \cup \{q\}$,
- $q \odot a \leftharpoondown\!= \bigcup_{p \in S} (p \circ a)$,
- $\forall p \in Q \;\; p \odot a \leftharpoondown\!= p \circ a$.

Ilusrāciju skatīt 2.9.b. zīm. ■

2.11. Nedeterminēto automātu akceptētās valodas

2.11.1. Apgalvojums. *Katram nedeterminētam automātam* $\mathfrak{N}$ *eksistē tāds automāts* $\mathfrak{A}$, *ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{N}) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}).$$



2.10. zīm.: $\mathcal{L}(\mathfrak{N}) = \mathcal{L}(\mathfrak{A})$

□ Pieņemsim, ka

$$\mathfrak{N} = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A, \circ, S, F\rangle$$

ir nedeterminēts automāts, tad

$$\mathfrak{A} \rightleftharpoons \langle \mathfrak{P}(Q), A, \odot, S, F_0\rangle,$$

kur

- $P \odot a \rightleftharpoons \bigcup_{q\in P} (q \circ a)$;
- $F_0 \rightleftharpoons \{F' \mid F' \cap F \neq \emptyset\}$, t.i., F_0 sastāv no kopas $\mathfrak{P}(Q)$ apakškopām, kurām ir kaut viens kopīgs elements ar kopu F.

(i) Pieņemsim, ka vārdu u akceptē nedeterminētais automāts $\mathfrak{N}$, tad eksistē ceļš $q \xrightarrow{u} q'$, kur

$$q \in S \quad \text{un} \quad q' \in F.$$

No šejienes $(q \circ u) \cap F \neq \emptyset$. Tā kā

$$q \circ u = \{q\} \circ u \underset{S2.2.6}{=} \{q\} \odot u,$$

tad $(\{q\} \odot u) \cap F \neq \emptyset$. Līdz ar to $(\{q\} \odot u) \in F_0$. Tātad $\mathfrak{A}$ akceptē vārdu u.

(ii) Pieņemsim, ka automāts $\mathfrak{A}$ akceptē vārdu u, tad $S \odot u \in F_0$. Līdz ar to eksistē tāds $p' \in S \odot u$, ka $p' \in F$. Tā kā (Sekas 2.2.6)

$$S \circ u = S \odot u,$$

tad eksistē tāds $p \in S$, ka $p \xrightarrow{u} p'$ ir nedeterminētā automāta $\mathfrak{N}$ ceļš. Tātad $\mathfrak{N}$ akceptē vārdu u.

Piemēru skatīt 2.10.. zīm. ■

2.12. Avotu akceptētās valodas

2.12.1. Teorēma. *Katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds automāts $\mathfrak{A}$, ka*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}).$$

□ Saskaņā ar Sekām 2.9.3 eksistē tads nedeterminēts automāts $\mathfrak{N}$, ka

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{N}).$$

Tagad atliek atsaukties uz Apgalvojumu 2.11.1, lai secinātu, ka eksistē tāds automāts $\mathfrak{A}$, ka $\mathcal{L}(\mathfrak{N}) = \mathcal{L}(\mathfrak{A})$. ■

2.13. Divpolu avoti

2.13.1. Definīcija. *Avotu $\mathfrak{A}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, \{p\}, \{q\}\rangle$ sauc par divpolu avotu, ja*

- *tikai $(p \circ \lambda) \cap \{p\} \neq \emptyset$, t.i., stāvoklis p nav pārejo loku ieeja;*
- *$q \circ \lambda = \{q\}$;*
- *$\bigcup\limits_{a \in A} q \circ a = \emptyset$.*

Tipisks divpolu avota piemērs ir $\mathfrak{A}_\lambda^{11}$ (2.11. zīm.).

2.13.2. Teorēma. *Katrai regulārai valodai eksistē divpolu avots, kas to akceptē.*

□ (i) Divpolu avots $\mathfrak{A}_\lambda^{11}$ (avota diagrammu skatīt 2.11. zīm.) akceptē $\emptyset$. Te parādīts, ka alfabēts A var būt patvaļīgs.

(ii) Divpolu avots

$$\mathfrak{A}_\lambda^{12} \leftleftharpoons \langle \{p, q\}, \mathfrak{P}(\{p, q\}), \{\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_m\}; \circ, \{p\}, \{q\}\rangle$$

$$\mathfrak{A}_\lambda^{11} \leftharpoondown \langle \{p, q\}, \mathfrak{P}(\{p, q, \}), \{\lambda, a_1, a_2, \dots, a_m\}; \circ, \{p\}, \{q\}\rangle$$

2.11. zīm.: Avots $\mathfrak{A}_\lambda^{11}$ akceptē $\emptyset$.

2.12. zīm.: Avots $\mathfrak{A}_\lambda^{12}$ akceptē $\{\lambda\}$; $\mathfrak{A}_\lambda^{13}$ akceptē $\{a_i\}$.

(avota diagrammu skatīt 2.12. zīm.) akceptē $\{\lambda\}$. Formāli

$$p \circ a \leftharpoondown q \circ a \leftharpoondown \begin{cases} \{q\}, & \text{ja } a = \lambda; \\ \emptyset, & \text{ja } a \neq \lambda. \end{cases}$$

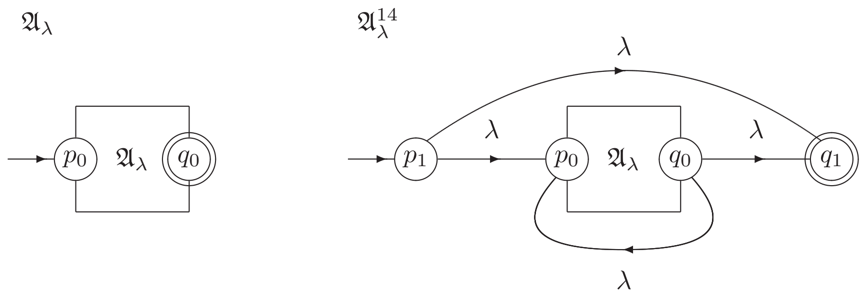
(iii) Divpolu avots $\mathfrak{A}_\lambda^{13}$ (avota diagrammu skatīt 2.12. zīm.) akceptē $\{a_i\}$, kur a_i kāds fiksēts kopas $\{a_1, a_2 \dots, a_m\}$ elements.

(iv) Pieņemsim, ka divpolu avots $\mathfrak{A}_\lambda = \langle Q, \mathfrak{P}(Q), A \cup \{\lambda\}; \circ, \{p_0\}, \{q_0\}\rangle$ (2.13. zīm. dota nosacīta $\mathfrak{A}_\lambda$ diagramma) akceptē valodu L, tad divpolu avots (2.12. zīm.)

$$\mathfrak{A}_\lambda^{14} \leftharpoondown \langle Q', \mathfrak{P}(Q'), A \cup \{\lambda\}; \odot, \{p_1\}, \{q_1\}\rangle,$$

kur $Q' \leftharpoondown Q \cup \{p_1, q_1\}$, akceptē valodu L^*. Formāli, $\{p_1, q_1\} \cap Q = \emptyset$ un

$$q \odot a \leftharpoondown \begin{cases} \{p_0, q_1\}, & \text{ja } q = p_1 \text{ un } a = \lambda; \\ \emptyset, & \text{ja } q = p_1 \text{ un } a \neq \lambda; \\ \emptyset, & \text{ja } q = q_1 \text{ un } a \neq \lambda; \\ \{q_1\}, & \text{ja } q = q_1 \text{ un } a = \lambda; \\ \{p_0, q_1\}, & \text{ja } q = q_0 \text{ un } a = \lambda; \\ q \circ a, & \text{pārējos gadījumos.} \end{cases}$$



2.13. zīm.: Ja avots $\mathfrak{A}_\lambda$ akceptē valodu L, tad $\mathfrak{A}_\lambda^{14}$ akceptē valodu L^*.

(v) Pieņemsim, ka divpolu avots $\mathfrak{A}_\lambda^1 = \langle Q_1, \mathfrak{P}(Q_1), A \cup \{\lambda\}; \bar{\circ}, \{p_1\}, \{q_1\}\rangle$ akceptē valodu L_1 un divpolu avots

$$\mathfrak{A}_\lambda^2 = \langle Q_2, \mathfrak{P}(Q_2), A \cup \{\lambda\}; \bar{\bar{\circ}}, \{p_2\}, \{q_2\}\rangle$$

akceptē valodu L_2, tad divpolu avots (2.14. zīm.)

$$\mathfrak{A}_\lambda^{15} \leftharpoondown \langle Q', \mathfrak{P}(Q'), A \cup \{\lambda\}; \odot, \{p_0\}, \{q_0\}\rangle,$$

kur $Q' \leftharpoondown Q_1 \cup Q_2 \cup \{p_0, q_0\}$, akceptē valodu L_1L_2. Formāli $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $\{p_0, q_0\} \cap (Q_1 \cup Q_2) = \emptyset$ un

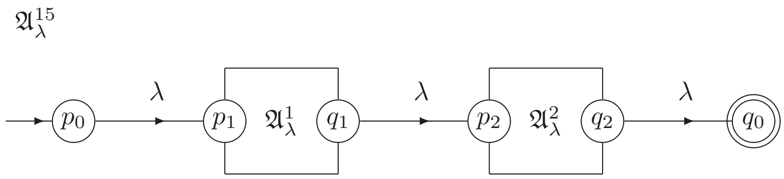
$$q \odot a \leftharpoondown \begin{cases} \{p_0, p_1\}, & \text{ja } q = p_0 \text{ un } a = \lambda; \\ \emptyset, & \text{ja } q \in \{p_0, q_0, q_1, q_2\} \text{ un } a \neq \lambda; \\ \{q_1, p_2\}, & \text{ja } q = q_1 \text{ un } a = \lambda; \\ \{q_0, q_2\}, & \text{ja } q = q_2 \text{ un } a = \lambda; \\ \{q_0\}, & \text{ja } q = q_0 \text{ un } a = \lambda; \\ q\bar{\circ}a, & \text{pārējos gadījumos, ja } q \in Q_1; \\ q\bar{\bar{\circ}}a, & \text{pārējos gadījumos, ja } q \in Q_2. \end{cases}$$

(vi) Pieņemsim, ka divpolu avots $\mathfrak{A}_\lambda^1 = \langle Q_1, \mathfrak{P}(Q_1), A \cup \{\lambda\}; \bar{\circ}, \{p_1\}, \{q_1\}\rangle$ akceptē valodu L_1 un divpolu avots

$$\mathfrak{A}_\lambda^2 = \langle Q_2, \mathfrak{P}(Q_2), A \cup \{\lambda\}; \bar{\bar{\circ}}, \{p_2\}, \{q_2\}\rangle$$

akceptē valodu L_2, tad divpolu avots (2.15. zīm.)

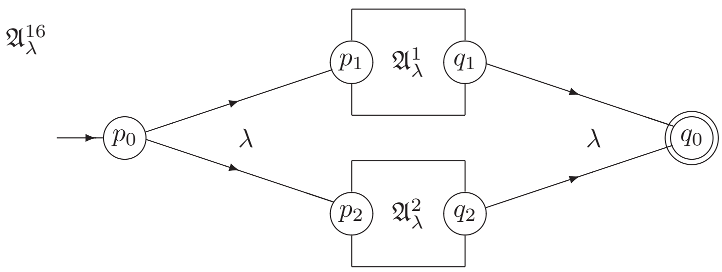
$$\mathfrak{A}_\lambda^{16} \leftharpoondown \langle Q', \mathfrak{P}(Q'), A \cup \{\lambda\}; \odot, \{p_0\}, \{q_0\}\rangle,$$



2.14. zīm.: Avots $\mathfrak{A}_\lambda^{15}$ akceptē valodu L_1L_2.

kur $Q' \overset{\leftharpoondown}{=} Q_1 \cup Q_2 \cup \{p_0, q_0\}$, akceptē valodu $L_1 \cup L_2$. Formāli $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $\{p_0, q_0\} \cap (Q_1 \cup Q_2) = \emptyset$ un

$$q \odot a \overset{\leftharpoondown}{=} \begin{cases} \{p_0, p_1, p_2\}, & \text{ja } q = p_0 \text{ un } a = \lambda; \\ \{q_0\}, & \text{ja } q = q_0 \text{ un } a = \lambda; \\ \{q_0, q_1\}, & \text{ja } q = q_1 \text{ un } a = \lambda; \\ \{q_0, q_2\}, & \text{ja } q = q_2 \text{ un } a = \lambda; \\ \emptyset, & \text{ja } q \in \{p_0, q_0, q_1, q_2\} \text{ un } a \neq \lambda; \\ q \bar{\circ} a, & \text{pārējos gadījumos, ja } q \in Q_1; \\ q \bar{\bar{\circ}} a, & \text{pārējos gadījumos, ja } q \in Q_2. \end{cases}$$



2.15. zīm.: Avots $\mathfrak{A}_\lambda^{16}$ akceptē valodu $L_1 \cup L_2$.

Saskaņā ar regulāras valodas definīciju (Definīcija 2.1.1) punkti (i) – (vi) demonstrē, ka katrai regulārai valodai eksistē divpolu avots, kas to akceptē. ∎

2.14. Automātu akceptētās valodas

2.14.1. Teorēma. *Katra valoda, ko akceptē automāts, ir regulāra.*

□ Pieņemsim, ka automāts $\mathfrak{A} = \langle Q, A, q_0, \circ, F\rangle$, tad

$$S_{ij} \leftleftharpoons \{u \,|\, q_i \circ u = q_j\}.$$

No šejienes: ja $\mathcal{I} \leftleftharpoons \{i \,|\, q_i \in F\}$, tad valoda, ko akceptē automāts $\mathfrak{A}$

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_{0i}.$$

Atliek konstatēt, ka $S_{\sigma\tau}$ ir regularas valodas, un teorēma būs pierādīta.
Pieņemsim, ka $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ un $Q_k \leftleftharpoons \{q_0, q_1, \ldots, q_k\}$, tad

$$S_{ij}^k \leftleftharpoons \{u \in S_{ij} \,|\, \forall v \in \mathrm{Pref}(u)\ (\lambda \neq v \neq u \Rightarrow q_i \circ v \in Q_k)\}.$$

Parādīsim, ka

$$S_{ij}^k = S_{ij}^{k-1} \cup S_{ik}^{k-1}(S_{kk}^{k-1})^* S_{kj}^{k-1}. \tag{2.4}$$

(i) Vispirms sāksim ar piemēriem. Automāts $\mathfrak{A}_{10}$ (4. zīm.):

$$S_{32}^1 = \{u \in S_{32} \,|\, \forall v \in \mathrm{Pref}(u)\ (\lambda \neq v \neq u \Rightarrow q_3 \circ v \in \{q_0, q_1\})\} = 1(0+1)^2.$$

Savukārt

$$S_{32}^0 \cup S_{31}^0 (S_{11}^0)^*\, S_{12}^0 \quad = \quad \emptyset \cup \{1\}\{0,1\}\{\lambda\}^*\{0,1\} = 1(0+1)^2 = S_{32}^1.$$

Tas bija vienkārši. Tagad aplūkosim nedaudz sarežģītāku gadījumu, pieņemot, ka formula (2.4) ir patiesa.

$$\begin{aligned} S_{32}^2 &= S_{32}^1 \cup S_{32}^1 (S_{22}^1)^* S_{22}^1, \\ S_{22}^1 &= S_{22}^0 \cup S_{21}^0 (S_{11}^0)^* S_{12}^0 = \{\lambda\} \cup \{1\}\{\lambda\}^*\{0,1\} \\ &= \lambda + 1(0+1). \end{aligned}$$

Tā rezultātā

$$\begin{aligned} S_{32}^2 &= S_{32}^1 \cup S_{32}^1 (S_{22}^1)^* S_{22}^1 \\ &= 1(0+1)^2 + 1(0+1)^2(\lambda + 1(0+1))^*(\lambda + 1(0+1)) \\ &= 1(0+1)^2(1(0+1))^*. \end{aligned}$$

(ii) Ja $u \in S_{ij}^k$, tad iespējami 2 gadījumi:

- $\forall v \in \mathrm{Pref}(u)\ q_i \circ v \neq q_k$;
- $\exists v \in \mathrm{Pref}(u)\ q_i \circ v = q_k$.

Pirmajā gadījumā $u \in S_{ij}^{k-1}$. Otrajā gadījumā eksistē īsākais vārda u priedēklis v_1, kam $q_i \circ v_1 = q_k$. Pieņemsim, ka w ir garākais vārda u priedēklis, kam $q_i \circ w = q_k$, tad $u = v_1 v_2 v_3$, kur $w = v_1 v_2$. Saprotams, ka gan v_1, gan v_2, gan v_3 var būt arī tukši vārdi. Tas demonstrē, ka

$$v_1 \in S_{ik}^{k-1} \quad \text{un} \quad v_3 \in S_{kj}^{k-1}.$$

Izvēlamies visus tos vārda v_2 priedēkļus $w_i \in \mathrm{Pref}(v_2)$, kuriem $q_k \circ w_i = q_k$. Sakātojam tos pēc garuma augošā secībā:

$$|w_0| < |w_1| < \ldots < |w_s|.$$

Tas nozīmē, ka $s = 0$, vai arī šai sarakstā ir tādi netukši vārdi $u_1, u_2, \ldots, u_s$, ka

$$w_1 = w_0 u_1, w_2 = w_1 u_2, \ldots, w_s = w_{s-1} u_s.$$

Tā rezultātā $q_k \circ w_0 = q_k, q_k \circ u_1 = q_k, q_k \circ u_2 = q_k, \ldots, q_k \circ u_s = q_k$ un

$$\{w_0, u_1, u_2, \ldots, u_s\} \subseteq S_{kk}^{k-1}.$$

Esam parādījuši, ka

$$u = v_1 v_2 v_3 = v_1 w_0 u_1 u_2 \ldots u_s v_3 \in S_{ik}^{k-1} (S_{kk}^{k-1})^* S_{kj}^{k-1}.$$

Tā kā $S_{ik}^{k-1} (S_{kk}^{k-1})^* S_{kj}^{k-1} \subseteq S_{ij}^{k}$, tad esam pierādījuši formulu (2.4).

(iii) Vai iespējama tālāka valodu S_{ij}^0 redukcija? Zināmā mērā — jā.

Pieņemsim, ka

$$A_{ij} \rightleftharpoons \{a \in A \mid q_i \circ a = q_j\} \cup \begin{cases} \{\lambda\}, & \text{ja } i = j; \\ \emptyset, & \text{ja } i \neq j, \end{cases}$$

tad

$$S_{ij}^0 = A_{ij} \cup A_{i0} A_{00}^* A_{0j}. \tag{2.5}$$

Šīs formulas patiesuma pierādījums kopē formulas (2.4) pierādījumu, tāpēc mēs to izlaižam.

(iv) Alfabēts A ir galīga kopa, tāpēc arī A_{ij} ir galīga kopa. Pieņemsim, ka

$$A_{ij} = \{b_1, b_2, \ldots, b_t\},$$

tad

$$A_{ij} = \{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \ldots \cup \{b_t\}.$$

Saskaņā ar regulāras valodas Definīciju 2.1.1 (punkti (i), (ii), (iii) un (vi)) tas demonstrē, ka A_{ij} ir regulāra valoda.

(v) Ievērojam $S_{\sigma\tau} = S_{\sigma\tau}^m$. Valodai $S_{\sigma\tau}^m$ pielietojam formulu (2.4). Iegūstam formulu, kas satur valodas S_{ij}^{m-1}. Katrai šāda tipa valodai atkal pielietojam formulu (2.4). Tā turpinam, līdz iegūstam formulu, kas satur tikai valodas S_{ij}^0.

Visbeidzot pielietojam formulu (2.5). Galarezultātā esam ieguvuši formulu, kas satur tikai valodas A_{ij} un operācijas

$$L_1 \cup L_2, L_1 L_2, L^*.$$

Te apzīmējumi L_1, L_2, L lietoti tikai, lai atklātā veidā parādītu, kādas operācijas domātas.

Tā kā valodas A_{ij} ir regulāras, tad saskaņā ar Definīciju 2.1.1 (punkti (iv),(v),(vi)) valoda $S_{\sigma\tau}$ ir regulāra. ■

2.14.2. Teorēma (Klinī). *Valoda L ir regulāra tad un tikai tad, ja eksistē automāts, kas to akceptē.*

□ ⇒ Vispirms atgādināsim Teorēmu 2.13.2: katrai regulārai valodai eksistē divpolu avots, kas to akceptē. Savukārt Teorēma 2.12.1 apgalvo, ka katram avotam $\mathfrak{A}_\lambda$ eksistē tāds automāts $\mathfrak{A}$, ka

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\lambda) = \mathcal{L}(\mathfrak{A}).$$

Līdz ar to katrai regulārai valodai eksistē automāts, kas to akceptē.

⇐ Teorēma 2.14.1. ■

2.14.3. Sekas. *Ja L — regulāra valoda, tad L^c — regulāra valoda.*

□ Ja reiz L — regulāra valoda, tad eksistē automāts $\mathfrak{A} = \langle Q, A, q_0, \circ, F\rangle$, kas to akceptē. No šejienes, automāts $\mathfrak{A}^c \leftrightharpoons \langle Q, A, q_0, \circ, Q \setminus F\rangle$ akceptē L^c. Saskaņā ar Klinī teorēmu tas nozīmē, ka L^c ir regulāra valoda. ■

Atzīmēsim, ka tieši Klinī teorēma dod iespēju īsi un vienkārši pierādīt tikko formulētās sekas.

2.14.4. Sekas. *Ja L_1 un L_2 ir regulāras valodas, tad $L_1 \cap L_2$ — regulāra valoda.*

□ $L_1 \cap L_2 = (L_1^c \cup L_2^c)^c$ ■