Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātiskās analīzes katedra

Jānis Buls

MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS UN KOPU TEORIJAS ELEMENTI

I daļa

Lekciju konspekts — 2008

SATURS

APZĪMĒJUMI

$\neg$ — negācija,
$\vee$ — disjunkcija, $\wedge$ — konjunkcija,
$\Rightarrow$ — implikācija, $\Leftrightarrow$ — ekvivalence,
$\exists$ — eksistences kvantors, $\forall$ — universālkvantors,
$x \in X$ — elements x pieder kopai X jeb x ir kopas X elements,
$A \subseteq B$ — kopa A ir kopas B apakškopa,
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ — kopu A un B apvienojums, šķēlums, starpība,
$\leftharpoondown$, $\rightharpoondown$ — vienādības saskaņā ar definīciju,
$\overline{1,n} \leftharpoondown \{1, 2, \ldots, n\}$; $\overline{k,n} \leftharpoondown \{k, k+1, \ldots, n\}$, te $k \leq n$,
$\mathbb{Z}$ — veselo skaitļu kopa, $\mathbb{Z}_+ \leftharpoondown \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$, $\mathbb{N} \leftharpoondown \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$,
$\mathbb{Q}$ — racionālo skaitļu kopa,
$\mathbb{R}$ — reālo skaitļu kopa, $\mathbb{C}$ — komplekso skaitļu kopa,
$\aleph_0$ — kopas $\mathbb{N}$ apjoms, $\mathfrak{c}$ — reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apjoms,
$\langle x, y \rangle \leftharpoondown (x, y) \leftharpoondown \{\{x\}, \{x, y\}\}$,
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftharpoondown ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$,
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftharpoondown \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \overline{1,n}\ (x_i \in A_i)\}$, A^n,
$f : x \mapsto y$, $f : X \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} Y$, $X \overset{f}{\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}} Y$,
$\mathrm{Dom}(f) \leftharpoondown \{x \mid \exists y \in Y\ (f : x \mapsto y)\}$, $\mathrm{Ran}(f) \leftharpoondown \{y \mid \exists x \in X\ (f : x \mapsto y)\}$,
$f : X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$, $f : X \twoheadrightarrow Y$, $f : X \hookrightarrow Y$

1. nodaļa

PAMATJĒDZIENI

Pamatjēdzieni un atvasināti jēdzieni. Kopas jēdziens, kopas apakškopa, vienādas kopas. Kopu uzdošanas veidi: pārskaitījums, elementa raksturīgā īpašība. Kopu apvienojums, šķēlums, starpība. Venna diagrammas.

Attīstītas teorijas pamatiezīme ir "spēles noteikumu" fiksēšana. Tāpēc rodas uzdevums veidot teoriju ar vislielāko rūpību un loģisko precizitāti. Tie apgalvojumi, kurus izmanto kaut kādā pierādījumā, arī paši prasa pierādījumu ar kādu agrāku apgalvojumu palīdzību, savukārt agrākie apgalvojumi arī jāpierāda, utt. Kurā vietā šai spriedumu ķēdei būs gals (precīzāk — sākums)? Tāda vispār nav. Kāda ir izeja no aprakstītā šķietami bezcerīgā stāvokļa? Matemātiķi šo "Gordija mezglu" nav atraisījuši, bet vienkārši pārcirtuši. Proti, kādā vietā spriedumu ķēdē daži apgalvojumi tiek akceptēti *bez pierādījuma*. Tos sauc par *aksiomām*.

Līdzīga situācija ir ar jēdzieniem. Katrā definīcijā jaunais jēdziens tiek konstruēts ar citu jēdzienu palīdzību. Tā rezultātā katra definīcija saistās ar citām, kuras definē tos jēdzienus, kas apskatāmajā definīcijā tiek uzskatīti par zināmiem. Piemēram, par taisnes nogriezni sauc taisnes daļu, kas atrodas starp diviem punktiem. Bet kā definēt jēdzienus "taisne" un "starp"? Tātad definīcijas veido tādu pašu bezgalīgu virkni kā pierādījumi. Tādēļ dažus jēdzienus izvēlas *bez definīcijas*. Tos sauc par *pamatjēdzieniem*. Pārējos (definētos) jēdzienus sauc par *atvasinātiem jēdzieniem*. Pamatjēdzienu un aksiomu izvēles pamatotība daudzējādā ziņā ir ārpus matemātikas. Te jābalstās gan uz filozofiju, praksi, gan zinātnes metodoloģiju. Matemātikas sistematizācija deviņpadsmitā gadsimta beigu posmā ļāva secināt, ka viens no perspektīvākajiem pamatjēdzieniem matemātikā ir kopas jēdziens. To var izvēlēties par vienīgo pamatjēdzienu visā matemātikā.

Noskaidrosim, ko mēs saprotam ar jēdzienu *kopa*. Tā kā kopa ir pamatjēdziens, tad to nevar nodefinēt ar citu matemātisku jēdzienu palīdzību. To var tikai paskaidrot aprakstoši. Tēlaini izsakoties, kopa ir pelēko zirņu maisiņš. Zirņus pašus sauc par kopas elementiem, "maisiņš" kalpo par šo zirņu apvienotāju.

Tomēr nejauksim: "maisiņš" nav kopa, kopa ir visi zirņi šajā maisiņā. Ja mēs šo kopu apzīmēsim ar A, tad citus zirņus, kuru nav šajā maisiņā, piemēram, zaļos, mēs nesauksim par kopas A elementiem. Tāpat kā tos pelēkos zirņus, kuru nav šajā maisiņā, mēs nesauksim par kopas A elementiem.

Ja mēs gribam pateikt, ka pelēkais zirnis (apzīmēsim to ar p) ir kopas A elements, tad lietosim pierakstu $p \in A$. Simbolu $\in$ sauc par *piederības simbolu*. Ja gribam uzsvērt, ka zaļais zirnis (apzīmēsim to ar z) nav kopas A elements, tad lietosim pierakstu $z \notin A$. Acīgam lasītājam esam spiesti atzīties, ka pa pakaļdurvīm esam ieveduši vēl vienu pamatjēdzienu, proti, attiecību $p \in A$, un ne tikai to. Jēdziens "p ir kopas A elements" arī ir pamatjēdziens. Taču te matemātiķi sāk spuroties:

— Vai tad kopas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nevar būt kādas citas kopas, teiksim, B elementi?

Saprotams, ka var. Piemēram, 1.b klase ir skolēnu kopa, bet skola ir klašu kopa, t.i., kopa, kuras elementi ir klases, tai skaitā arī 1.b klase. Kā jau tas realitātē mēdz būt, arī šai piemērā mēs esam abstrahējušies no dažām skolas pazīmēm, piemēram, skolas neatņemama sastāvdaļa parasti ir arī skolotāji.

Ja reiz vienas kopas var būt kādas citas kopas elementi, tad var iztikt bez pamatjēdziena "elements". Šai gadījumā mūsu rīcībā ir tikai kopas, un attiecība $p \in A$ ir definīcija jēdzienam "p ir kopas A elements". Šāda pieeja tiešām ir iespējama, bet mūsu mērķis šobrīd nav pamatjēdzienu skaita minimizēšana, tāpēc mēs pieturēsimies mūsuprāt pie dabiskākas koncepcijas, proti, jēdziens "p ir kopas A elements" arī ir pamatjēdziens.

Kopu teorijas aksiomātikas pamatā ir dažādas aksiomas, kuru uzdevums ir nodrošināt izvairīšanos no pārpratumiem un paradoksiem. Tieši aksiomas un tikai tās ir zināms pamatjēdzienu raksturojums, to netieša un apzināti nepilnīga "definīcija". Piemēram, sekojoša aksioma: eksistē kopa, kas nesatur nevienu elementu. Arī pārējās kopu teorijas aksiomas ir tikpat "acīm redzamas", tāpēc praksē aprobežojas ar tā saukto "naivo kopu teoriju". Tā balstās uz intuitīviem priekšstatiem, kas visiem cilvēkiem vairāk vai mazāk vienādi. Tā kā mūsu uzdevums nav kopu teorijas izpēte, tad arī mēs turpmāk darbosimies "naivās kopu teorijas" ietvaros.

Pierakstu $A \leftharpoondown\!\!\!- \{a_1, ..., a_n\}$ mēs lietosim kā saīsinājumu apgalvojumam: kopu, kas sastāv no elementiem $a_1, ..., a_n$, turpmāk apzīmēsim ar lielo burtu A. Savukārt pierakstu $B \leftharpoondown\!\!\!- \{x \mid P(x)\}$ mēs uztversim kā apgalvojumu: kopa B sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuriem piemīt īpašība P, citiem vārdiem, no tiem elementiem x, kuriem patiess apgalvojums $P(x)$. Izmantojot šo vienošanos, definēsim šādas darbības ar kopām:

$$\begin{aligned} A \cup B &\leftharpoondown\!\!\!- \{\, x \mid x \in A \ \text{ vai } \ x \in B \,\}, \\ A \cap B &\leftharpoondown\!\!\!- \{\, x \mid x \in A \ \text{ un } \ x \in B \,\}, \\ A \setminus B &\leftharpoondown\!\!\!- \{\, x \mid x \in A \ \text{ un } \ x \notin B \,\}. \end{aligned}$$

Operāciju $\cup$ sauc par kopu *apvienojumu*, $\cap$ — par *šķēlumu*, $\setminus$ — par kopu A un B *starpību*. Piemēram, $\mathbb{R}^0 \leftharpoondown\!\!\!- \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ir reālo skaitļu kopa bez elementa 0.

1.1. Piemēri. Pieņemsim, ka $A \leftharpoondown\!\!\!- \{\sqrt{2}, \heartsuit, 7, \Box\}$, bet $B \leftharpoondown\!\!\!- \{\heartsuit, 7, \bigcirc, A\}$, tad

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\sqrt{2}, \heartsuit, 7, \Box, \bigcirc, A\}, \\ [4;12[\cup]9;23] &= [4;23], \\ A \cap B &= \{\heartsuit, 7\}, \\ [4;12[\cap]9;23] &=]9;12[, \\ A \setminus B &= \{\sqrt{2}, \Box\}, \\ [4;12[\setminus]9;23] &= [4;9], \\ B \setminus A &= \{\bigcirc, A\}, \\ ]9;23] \setminus [4;12[&= [12;23]. \end{aligned}$$

Mēs teiksim, ka kopa A ir kopas B *apakškopa* un lietosim pierakstu $A \subseteq B$, ja izpildās nosacījums: katrs kopas A elements x ir arī kopas B elements. Šajā situācijā lietosim arī pierakstu $B \supseteq A$ un dažkārt teiksim, ka B ir kopas A *virskopa*.

1.2. Sekas. *Jebkurām kopām A un B*

$$A \setminus B \subseteq A .$$

1.3. Definīcija. *Divas kopas A un B sauc par vienādām kopām, ja $A \subseteq B$ un $B \subseteq A$. Šai situācijā lieto pierakstu $A = B$.*

Ja $A \subseteq B$ un $A \neq B$, tad kopu A sauc par kopas B *īstu* apakškopu un lieto pierakstu $A \subset B$.

Ja kopa A nav kopas B apakškopa, tad lieto pierakstu $A \nsubseteq B$. Savukārt, ja A nav kopas B īsta apakškopa, tad lieto pierakstu $A \not\subset B$

1.4. Piemēri. 1. Pieņemsim, ka $A \leftrightharpoons \{\bigtriangledown, \diamondsuit, \bigcirc, \Box\}$, bet $B \leftrightharpoons \{\bigtriangledown,\ 0,\ 1,\ 2,\ \diamondsuit,\ \bigcirc,\ \Box\}$, tad $A \subseteq A$ un $A \subseteq B$. Atzīmēsim, ka $A \subset B$, taču kopa A nav kopas A īsta apakškopa jeb simboliski $A \not\subset A$.

2. Pieņemsim, ka $A \leftrightharpoons \{\wedge,\ \bigtriangledown, \diamondsuit, \bigcirc\}$, bet $B \leftrightharpoons \{\vee,\ \bigtriangledown, \diamondsuit, \bigcirc\}$, tad $A \not\subset B$ un $B \not\subset A$; vēl vairāk $A \nsubseteq B$ un $B \nsubseteq A$.

Speciāli izdalīsim kopu, kas nesatur nevienu elementu. To sauc par *tukšo* kopu, un tās apzīmēšanai parasti lieto pierakstu $\emptyset$. Atzīmēsim, ka jebkurai kopai A ir spēkā apgalvojums: $\emptyset \subseteq A$. Ja $A \neq \emptyset$, tad $\emptyset \subset A$.

1.5. Sekas. *Jebkurai kopai A*

$$
\begin{aligned}
A \setminus \emptyset &= A\,, &\quad (1.1)\\
\emptyset \setminus A &= \emptyset\,, \\
A \setminus A &= \emptyset\,. &\quad (1.2)
\end{aligned}
$$

1.6. Piemērs. Pieņemsim, ka $A \leftrightharpoons \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}$, bet $B \leftrightharpoons \{\neg, \forall, \exists, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, tad $A = B$.

Kopu starpība speciālā gadījumā, ja $B \subseteq A$, saistās ar īpašu terminoloģiju.

1.7. Definīcija. *Ja $B \subseteq A$, tad starpību $A \setminus B$ sauc par kopas B papildinājumu kopā A, un lieto apzējumu B'_A.*

Formulas

$$
\begin{aligned}
\emptyset'_A &= A\,, \\
A'_A &= \emptyset
\end{aligned}
$$

ir formulu (1.1) un (1.2) pieraksts ar papildinājuma simbolu.

Ja nerodas pārpratumi, tad īsuma labad B'_A vietā lieto apzīmējumu B' un garākā termina "kopas B papildinājums kopā A" vietā lieto īsāku — "kopas B papildkopa".

1.8. Piemēri. 1. Pieņemsim, ka $A \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, (\,,)\}$, bet $B \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{\,(\,,)\,\}$, tad

$$B' = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}.$$

2.

$$\begin{aligned}
[0;1]' &=]-\infty;0[\, \cup \,]1;+\infty[,\\
]0;1]' &=]-\infty;0] \cup \,]1;+\infty[,\\
]0;1[' &=]-\infty;0] \cup [1;+\infty[,\\
]0;1[' &=]-\infty;0] \cup [1;+\infty[,\\
]-\infty;0]' &=]0;+\infty[,\\
]-\infty;1[' &= [1;+\infty[\,.
\end{aligned}$$

Te mēs klusuciešot pieņēmām, ka mūs interesē papildinājumi kopā $\mathbb{R}$.

Kā jau iepriekš teicām, var aplūkot kopas, kuras elementi savukārt ir kopas. Matemātikā svarīgs piemērs ir dotās kopas A visu apakškopu kopa $\mathfrak{P}(A)$, proti,

$$\mathfrak{P}(A) \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{B | B \subseteq A\}\,.$$

1.9. Piemērs. Pieņemsim, ka $A \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{\,(\,,)\,\}$, tad

$$\mathfrak{P}(A) = \{\,\emptyset, \{\,(\,\}, \{\,)\,\}, \{\,(\,,)\,\}\,\}\,.$$

Atzīmēsim, ka attiecība $p \in A$ nav transitīva, proti, ja $v \in V$ un $V \in K$, tad no tā neseko, ka $v \in K$. Viduslaikos teica:

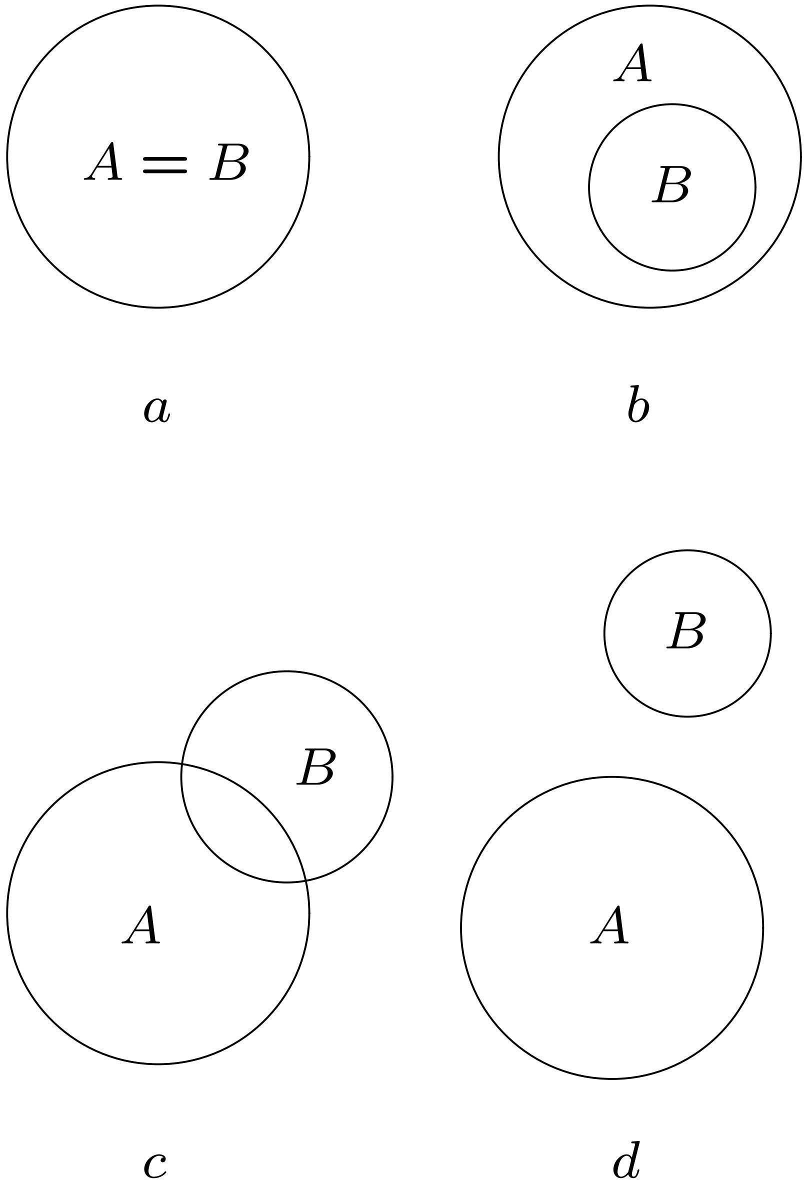
— Mana vasaļa vasalis nav mans vasalis.

1.10. Piemēri. 1. Pieņemsim, ka $A \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}$, $V \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{\,(\,,)\,\}$, bet $K \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{A, V\}$, tad $(\in V$, bet $(\notin K$. Mēs ņēmām vērā, ka K elementi ir kopas A un V, un nekas cits. Tas viss nofiksēts kopas K definīcijā, proti, $K \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{A, V\}$.

2. Pieņemsim, ka $A \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}$, $V \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{\,(\,,)\,\}$, bet $K \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{A, V, \,(\,,)\,\}$, tad kreisā iekava (ir gan kopas V, gan kopas K elements.

Stingri ņemot $\forall \neq \{\,\forall\,\}$, jo $\forall$ ir universālkvantors, bet $\{\,\forall\,\}$ — kopa, kuras elements ir universālkvantors $\forall$. Literatūrā tomēr nereti vienelementīgu kopu pieraksta tāpat kā šīs kopas vienīgo elementu, t.i, faktiski akceptē vienādību

$$a = \{a\}\,.$$



1.1. zīm.: Divu kopu savstarpējie stāvokļi: *a*) $A = B$, *b*) $B \subset A$, *c*) $A \cap B \neq \emptyset \wedge A \setminus B \neq \emptyset \wedge B \setminus A \neq \emptyset$, *d*) $A \cap B = \emptyset$.

Arī mēs tā darīsim, ja tikai būs pārliecība, ka no konteksta viss tāpat ir skaidrs un neradīsies traucējoši pārpratumi.

Galvenajām skaitļu kopām, kuras matemātikā izmanto ļoti bieži, piešķirti patstāvīgi standartapzīmējumi (diemžēl sakarā ar teorētiskās datorzinātnes strauju ienākšanu mūsdienu zinātnē daži apzīmējumi vairs nav interpretējami viennozīmīgi).

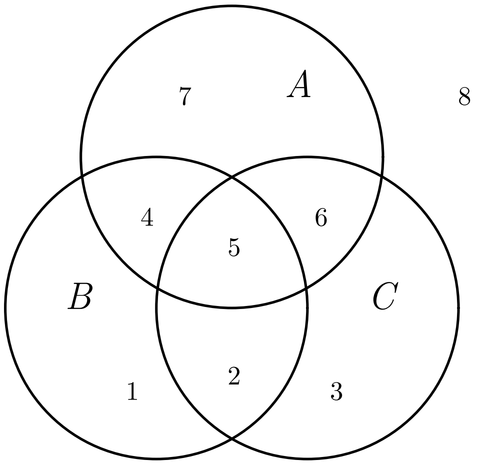
$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{Z} & \text{—} & \text{visu } \textit{veselo skaitļu} \text{ kopa,} \\
\mathbb{Z}_+ & \leftharpoondown & \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ un } x > 0\}, \\
\mathbb{N} & \leftharpoondown & \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, \\
\mathbb{Q} & \leftharpoondown & \left\{ \dfrac{x}{y} \,\middle|\, x \in \mathbb{Z} \text{ un } y \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \\
\mathbb{R} & \text{—} & \text{visu } \textit{reālo skaitļu} \text{ kopa,} \\
\mathbb{C} & \text{—} & \text{visu } \textit{komplekso skaitļu} \text{ kopa,}
\end{array}
$$

Venna diagrammas. Kopas un to savstarpējās attiecības bieži attēlo grafiski ar tā sauktajām *Eilera diagrammām* kā patvaļīgas plaknes punktu kopas. Parasti šīs kopas ir apļi, ovāli, elipses. Tā 1.1. attēlā parādītas Eilera diagrammas divu kopu dažādiem savstarpējiem stāvokļiem. Gadījumu c mēdz saukt par vispārīgāko situāciju.

Formulas, kuras satur divas vai trīs kopas, visvienkāršāk pierādāmas grafiski, izmantojot *Venna diagrammas.* Tā sauc Eilera diagrammu paveidu, kurās kopas attēlotas "vispārīgā stāvoklī" tā, lai visi to savstarpējie šķēlumi būtu netukši (1.1. c zīm. un 1.2. zīm.). Piemēram, attēlojot kopu A ar apli, kopu B — ar citu apli, bet kopu C — ar trešo apli (1.2. zīm.), izveidojas septiņi iekšējie apgabali, kurus 1.2. zīmējumā mēs apzīmējām ar skaitļiem no 1 līdz 7, un viens ārējais apgabals (1.2. zīmējumā mēs to apzīmējām ar skaitli 8). Tagad ērti pierādāmas formulas, kuras satur trīs kopas. Formulas

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$$

pierādījums ilustrēts 1.3. zīmējumā. Tā 1.3. a zīmējumā pelēkais apgabals ir kopa $A \setminus B$; atņemam vēl kopu C un iegūstam pelēko apgabalu 1.3. b. Savukārt 1.3. c zīmējumā pelēkais apgabals ir kopa $A \setminus C$; atņemam vēl kopu B un iegūstam pelēko apgabalu 1.3. d. Tā kā pelēkais apgabals, kas attēlots 1.3. b zīmējumā, sakrīt ar pelēko apgabalu, kas attēlots 1.3. d zīmējumā, tad



1.2. zīm.: Venna diagrammu pamatapgabali trim kopām: $A = \{4,5,6,7\}$, $B = \{1,2,4,5\}$, $C = \{2,3,5,6\}$.

$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$. Līdzīgi izmantojama arī 1.2. zīmējuma diagramma. Šai gadījumā var pieņemt, ka

$$\begin{aligned} A &= \{4,5,6,7\}, \\ B &= \{1,2,4,5\}, \\ C &= \{2,3,5,6\}, \end{aligned}$$

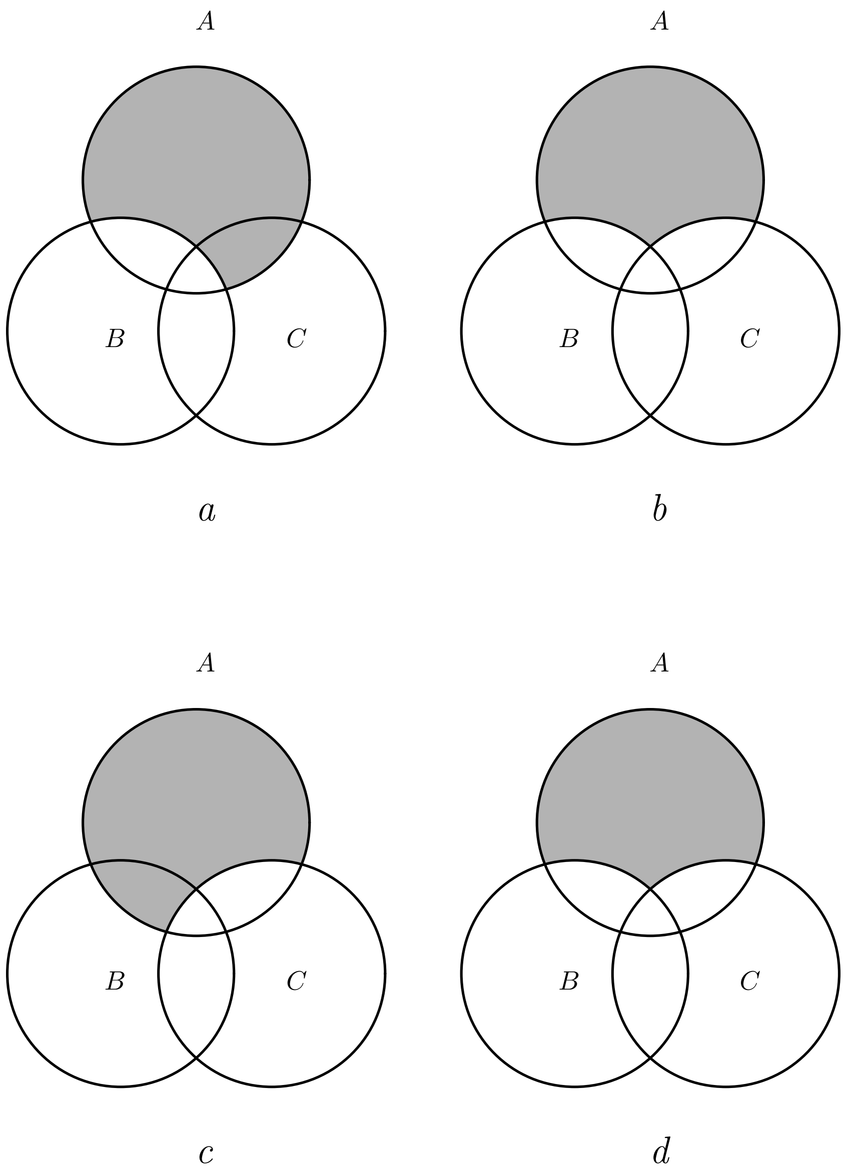
tad

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{6,7\}, \\ (A \setminus B) \setminus C &= \{7\}, \\ A \setminus C &= \{4,7\}, \\ (A \setminus C) \setminus B &= \{7\}. \end{aligned}$$

Tā rezultātā $(A \setminus B) \setminus C = \{7\} = (A \setminus C) \setminus B$.

1.11. Vingrinājumi. Asocatīvie likumi:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cap (B \cap C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$



1.3. zīm.: Formulas $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$ pierādījums ar Venna diagrammām: *a*) $A \setminus B$, *b*) $(A \setminus B) \setminus C$, *c*) $A \setminus C$, *d*) $(A \setminus B) \setminus C$.

Neitrālā elementa aksistence:

$$\emptyset \cup A \;=\; A \;=\; A \cup \emptyset.$$

Nulles elementa eksistence:

$$A \cap \emptyset \;=\; \emptyset \;=\; \emptyset \cap A.$$

Idempotences likumi:

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, \\ A \cap A &= A. \end{aligned}$$

Komutatīvie likumi:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, \\ A \cap B &= B \cap A. \end{aligned}$$

Distributīvie likumi:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \setminus C &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C), \\ (A \cup B) \setminus C &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C). \end{aligned}$$

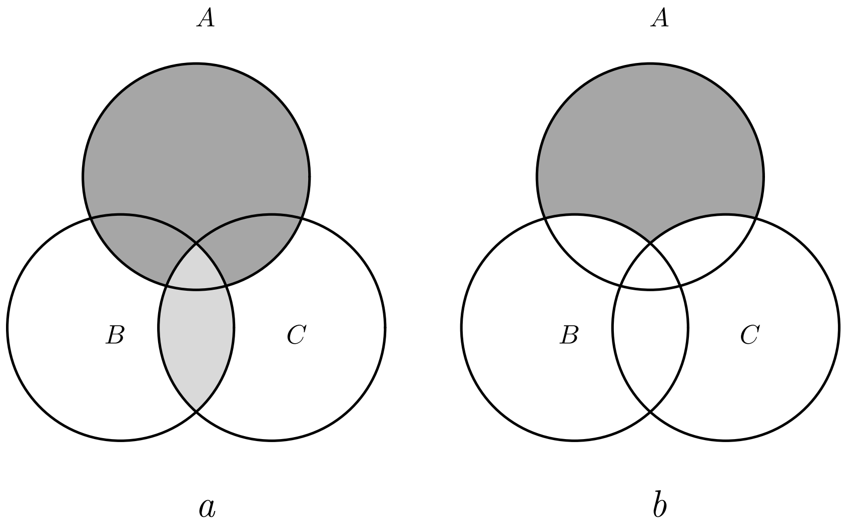
Absorbcijas likumi:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap A) &= A, \\ A \cap (B \cup A) &= A. \end{aligned}$$

Formulas

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

pierādījums ilustrēts 1.4. a zīmējumā. Te gaiši pelēkā tonī iekrāsots apgabals, kas atbilst kopu šķēlumam $B \cap C$. Tā mēs varam pārliecināties, ka 1.4. a zīmējumā tumši tonētais apgabals atbilst kopai $A \setminus (B \cap C)$. Taču jāatzīst, ka 1.4. a zīmējums ne pārāk pārliecinoši demonstrē, ka tumši pelēkajam apgabalam tiešām atbilst kopa $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, tāpēc nepieciešami papildus



1.4. zīm.: Venna diagrammas: *a*) $A \setminus (B \cap C)$, *b*) $A \setminus (B \cup C)$.

apsvērumi, piemēram, varam sanumurēt visus apgabalus, kā jau iepriekš tas parādīts 1.2. zīmējumā. Tagad var pieņemt, ka

$$\begin{aligned} A &= \{4,5,6,7\}, \\ B &= \{1,2,4,5\}, \\ C &= \{2,3,5,6\}. \end{aligned}$$

Šai gadījumā

$$\begin{aligned} B \cap C &= \{2,5\}, \\ A \setminus (B \cap C) &= \{4,6,7\}, \\ A \setminus B &= \{6,7\}, \\ A \setminus C &= \{4,7\}, \\ (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= \{6,7\} \cup \{4,7\} = \{4,6,7\}. \end{aligned}$$

Tā rezultātā $A \setminus (B \cap C) = \{4,6,7\} = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Savukārt formulas

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

pierādījums ilustrēts 1.4. b zīmējumā. Te neiekrāsotais apgabals atbilst kopu apvienojumam $B \cup C$. Tā mēs varam pārliecināties, ka 1.4. b zīmējumā tumši tonētais apgabals atbilst kopai $A \setminus (B \cup C)$. Taču līdzīgi iepriekšējam gadījumam jāatzīst, ka 1.4. b zīmējums ne pārāk pārliecinoši demonstrē, ka tumši pelēkajam apgabalam tiešām atbilst kopa $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Ņemot vērā iepriekš ieviesto apgabalu numerāciju, iegūstam

$$\begin{aligned}
B \cup C &= \{1,2,3,4,5,6\},\\
A \setminus (B \cup C) &= \{7\},\\
A \setminus B &= \{6,7\},\\
A \setminus C &= \{4,7\},\\
(A \setminus B) \cap (A \setminus C) &= \{6,7\} \cap \{4,7\} = \{7\}.
\end{aligned}$$

Tā rezultātā $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Salīdzinot 1.4. b zīmējumu ar 1.3. b un 1.3. d zīmējumiem redzam, ka tie visi sakrīt, tāpēc

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B.$$

Šie piemēri spilgti ilustrē, ka Venna diagrammas gan ļauj pierādīt formulas, taču strīdīgos gadījumos jāņem palīgā arī citi ne mazāk pārliecinoši argumenti, vai arī attiecīgie zīmējumi jānoformē ar pienācīgiem paskaidrojumiem tā, lai nerastos šaubas.

Diagrammas ļauj atpazīt arī tās formulas, kas nav spēkā. Tā 1.5. zīmējumā parādīts, ka kopu atņemšana nav komutatīva, proti, vispārīgā gadījumā $A \setminus B \neq B \setminus A$. Tas nebūt nenozīmē, ka nav iespējams piemeklēt tādas kopas A un B, kurām izpildās vienādība, piemēram, ja $A = B$, tad $A \setminus B = B \setminus A$.

Ja formulu pierādīšanai nepieciešams spriedums, kas pierāda, ka tā ir spēkā jebkurām formulā ieejošām kopām, tad formulas atspēkošanai pietiek ar vienu vienīgu pretpiemēru. Formulai

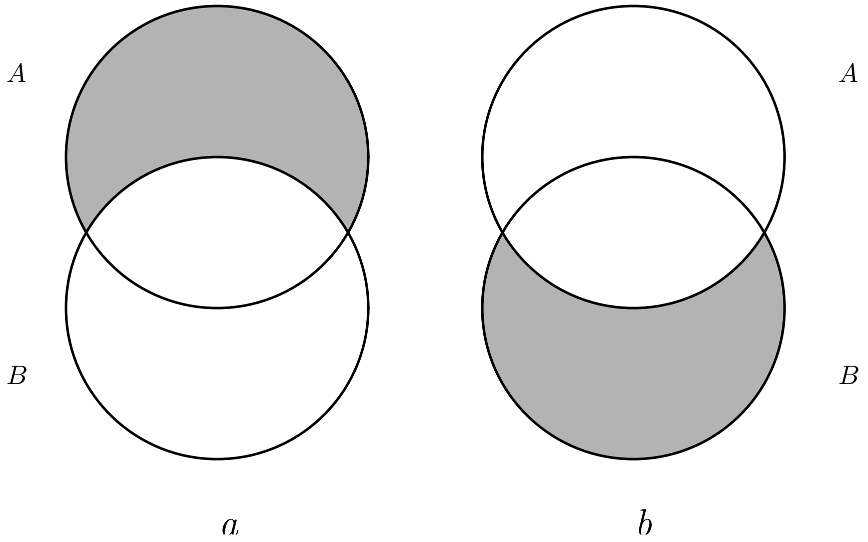
$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C) \tag{1.3}$$

par tādu pretpiemēru der kopas $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$, $C = \mathbb{Q}$. Tiešām

$$(A \setminus B) \cup C = (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q},$$

bet

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \setminus (\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset\,.$$



1.5. zīm.: Komutatīvā likuma $A \setminus B = B \setminus A$ atspēkojums ar Venna diagrammām: *a*) $A \setminus B$, *b*) $B \setminus A$.

Protams šis pretpiemērs nav vienīgais, kas atspēko formulu (1.3).

Ja $A = B = \emptyset$ un $C = \{\exists\}$, tad

$$(A \setminus B) \cup C = \{\exists\},$$

bet

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = \{\exists\} \setminus \{\exists\} = \emptyset\,.$$

Ja viens un tas pats secinājums pirmoreiz iegūts ar lielākiem līdzekļiem, bet otrreiz ar mazākiem līdzekļiem, tad otro rezultātu ir pamats uzskatīt par spēcīgāku. Arī matemātikā nav gods zvirbuļus šaut ar lielgabaliem. Tādēļ otrais formulas (1.3) atspēkojums $A = B = \emptyset$, $C = \{\exists\}$ vērtējams augstāk par pretpiemēru $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$, $C = \mathbb{Q}$.

Visbeidzot jāpasvītro, ka Venna diagrammu metode lietojama bez iebildēm tikai gadījumā, ja formula satur ne vairāk kā trīs kopas.

2. nodaļa

ATTĒLOJUMS

Korteža jēdziens, Dekarta reizinājums. Funkcijas (attēlojuma) definīcija, funkcijas uzdošanas veidi. Attēlojumu veidi. Inversais attēlojums. Algebriska operācija.

Iepazīstoties ar reālo pasauli, mēs sastopamies ar raksturojošiem lielumiem, kuri mainās procesa laikā. Piemēram, gaisa temperatūra gada laikā vai preces pieprasījums atkarībā no cenas. Tāpēc funkcijas jēdziens ir viens no vissvarīgākajiem matemātikas jēdzieniem.

Skolas kursā jūs jau esat iepazinušies ar dažām funkcijām, kas pierakstītas analītiskā formā, piemēram, $y = 2x^2 - 1$, $y = \cos x$, utt. Taču šīs zināmās funkcijas neizsmeļ visu funkciju klasi. Piemēram, funkcija ir arī šāda:

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , \text{ ja } \ x \leq 0; \\ \cos x & , \text{ ja } \ x > 0; \end{cases}$$

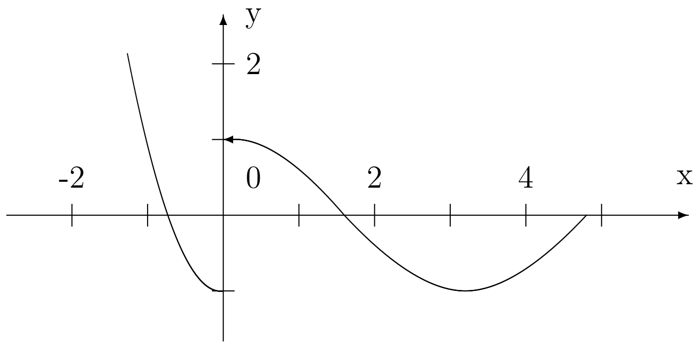
tās grafiks dots 2.1. zīmējumā (bultiņa nozīmē, ka galapunkts nepieder grafikam).

Funkcija ir arī $y = \lfloor x \rfloor = \max\{t \,|\, t \in \mathbb{Z} \wedge t \leq x\}$ — veselā daļa no x, kuras piekārtojuma būtību vieglāk formulēt vārdiski: tā katram reālam skaitlim x piekārto lielāko veselo skaitli, kas mazāks vai vienāds ar pašu x. Piemēram, $\lfloor 3,1 \rfloor = 3$, bet $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$. Šo funkciju sauc par *veselās daļas funkciju*, tās grafiks dots 2.2. zīmējumā.

Kā formāli definēt funkciju?

Šajā nolūkā vispirms noskaidrosim Dekarta reizinājuma jēdzienu. Pieņemsim, ka dotas divas kopas X un Y.

2.1. Definīcija. *Kopu* $\{\,\{x\}, \{x, y\}\,\}$ *sauc par elementu* $x \in X$, $y \in Y$ *sakārtotu pāri un apzīmē* (x, y).



2.1. zīm.

Pieraksts (x, y) tiešā veidā norāda, ka x ir pāra pirmais elements, bet y — otrais. Tā rezultātā pāris (x, y) ir vienāds ar pāri (a, b) tad un tikai tad, ja $x = a$ un $y = b$. Tas ļauj secināt, ka $(x, y) \neq (y, x)$, izņemot vienu situāciju, ja $x = y$. Līdz ar to, piemēram, $(0, 6) = (1 - 1, 0 + 6)$, bet $(0, 6) \neq (6, 0)$. Visbeidzot atzīmēsim, ka kopa $\{\, \{x\}, \{y\} \,\}$ nedefinē sakārtotu pāri, jo $\{\, \{x\}, \{y\} \,\} = \{\, \{y\}, \{x\} \,\}$.

Balstoties uz elementu pāri (x, y) tagad definēsim "elementu trijnieku (x, y, z)", "elementu četrinieku (x, y, z, w)", vispārīgā gadījumā — "n - dimensionālu kortežu pār kopām A_1, A_2,..., A_n".

Ērtības labad kopu $\{1, 2, ..., n\}$ turpmāk apzīmēsim ar $\overline{1, n}$.

2.2. Definīcija. *Pāri $((x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$, kur $\forall i \in \overline{1, n}$ $(x_i \in A_i)$, sauc par n - dimensionālu kortežu pār kopām A_1, A_2,...,A_n.*

Turpmāk n - dimensionāla korteža apzīmēšanai lietosim pierakstu

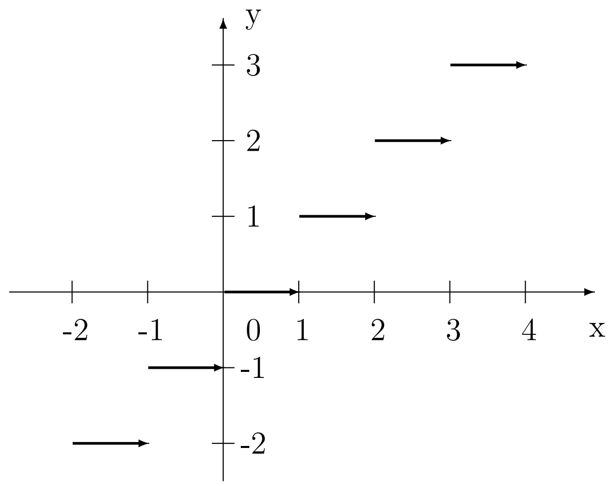
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2.3. Definīcija. *Visu sakārtoto pāru (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, kopu sauc par kopu X un Y Dekarta reizinājumu un apzīmē $X \times Y$.*

Dekarta reizinājumā nav būtiski, vai $X = Y$ vai $X \neq Y$. Tātad

$$X \times Y \;=\; \{(x, y) \,|\, x \in X \;\text{ un }\; y \in Y\,\}.$$

Vispārīgā gadījumā Dekarta reizinājumu definē šādi.



2.2. zīm.: Funkcijas $y = \lfloor x \rfloor$ grafiks.

2.4. Definīcija. *Par kopu* A_1*,* A_2 *, ... ,* A_n *Dekarta reizinājumu*

$$A_1 \times A_2 \times .... \times A_n$$

sauc visu n - dimensionālu kortežu kopu pār kopām A_1*,* A_2*,...,*A_n*, t.i.,*

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \; = \; \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, \forall i \in \overline{1, n}\, (x_i \in A_i)\,\}.$$

Ja $A = A_1 = A_2 = ... = A_n$, tad lieto apzīmējumu

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \; = \; A^n \, .$$

2.5. Piemērs. Pieņemsim, ka $X = \{$suns, kaķis$\}$ — kopa, kas satur divus elementus: suni un kaķi, bet $Y = \{$Antra, Uldis$\}$ — kopa, kas arī satur divus elementus. To Dekarta reizinājums ir kopa $X \times Y$, kura saturēs četrus elementus — visus iespējamos pārus, kuru pirmais elements ir no kopas X, bet otrais elements — no kopas Y:

$$X \times Y \; = \; \{\, (\text{suns, Antra}), (\text{suns, Uldis}), (\text{kaķis, Antra}), (\text{kaķis, Uldis})\,\}.$$

Aprakstot funkcijas jēdzienu, pirmajā tuvinājumā var teikt šādi: ja vienas kopas objektiem, piemēram, rakstniekiem, piekārto citas kopas objektus, piemēram, viņu uzrakstītās grāmatas, tad dota funkcija ar starta kopu "rakstnieki" un finiša kopu "grāmatas". Ja rakstnieku kopu apzīmē ar R, grāmatu kopu ar G, bet pašu funkciju ar burtu l, tad varam sacīt, ka uzdota funkcija $l: R \to G$. Bet vai aplūkotais piemērs patiešām veido funkciju? Rakstnieks Zigmunds Skujiņš taču ir sarakstījis daudzas piedzīvojumu pilnas grāmatas! Piemērs ar rakstniekiem un viņu sarakstītajām grāmatām nav funkcija. Jo par funkciju (pēc skolas kursa) sauc tikai tos attēlojumus, kuri katram starta kopas elementam piekārto ne vairāk kā vienu finiša kopas elementu.

Jēdzienu "funkcija" mūsdienu matemātikā traktē ļoti plašā nozīmē. Pievērsīsimies vēl vienam piemēram, kurā nu jau būs aplūkota funkcija.

2.6. Piemērs. 9.klases skolēni Marta, Rita, Juris un Andrejs raksta kontroldarbu matemātikā, par kuru var saņemt atzīmi no 1 līdz 10. Marta kontroldarbu uzraksta uz 8, Rita un Andrejs — uz 6, bet Juris darbu nav nodevis un tāpēc atzīmi nesaņem.

Minētais apraksts mūsdienu izpratnē definē funkciju. Formāli izsakoties, ja ar X apzīmējam kopu

$$X = \{\text{Marta, Rita, Juris, Andrejs}\}$$

un ar Y apzīmējam kopu

$$Y = \{1, 2, ..., 10\},$$

tad augstāk apskatītais apraksts definē piekārtojumu

$$\begin{aligned} f &: \text{Marta} \mapsto 8, \\ f &: \text{Rita} \mapsto 6, \\ f &: \text{Andrejs} \mapsto 6. \end{aligned}$$

Līdz ar to ir dota funkcija $f: X \multimapdot\!\!\rightarrow Y$ ar starta kopu X un finiša kopu Y. Katram kopas X elementam attēlojums f piekārto ne vairāk kā vienu kopas Y elementu. Juris nesaņēma kontroldarba atzīmi, tāpēc kopas X elementam "Juris" funkcija f nav definēta. Mūsu gadījumā $X \neq Y$.

Ciešāk ielūkojoties piemērā, ievērosim, ka darbojamies ar Dekarta reizinājuma $X \times Y$ daļu. Šī daļa ir pāri: (Marta,8), (Rita,6), (Andrejs,6). Varam šos pārus apvienot vienā kopā

$$G = \{\ (\text{Marta},8),\ (\text{Rita},6),\ (\text{Andrejs},6)\} \quad —$$

šo kopu sauc par funkcijas f grafiku. Trijnieks (X, Y, G) pilnībā definē funkciju f. Citiem vārdiem sakot, ja mums dota funkcijas f starta kopa X, finiša kopa Y un grafiks G, tad mums ir zināms viss par šo funkciju.

2.7. Definīcija. *Trijnieku* $f = (X, Y, F)$*, kur* $F \subseteq X \times Y$*, sauc par attēlojumu jeb funkciju, ja visiem kopas* F *elementiem* $(x, y), (x, z)$ *ir spēkā vienādība* $y = z$*. Kopu* X *sauc par attēlojuma* f *starta jeb izejas kopu,* Y *— par finiša jeb ieejas kopu,* F *sauc par grafiku.*

Ja $(x, y) \in F$, tad lieto pierakstu $f(x) = y$ jeb $f : x \mapsto y$. Šajā situācijā saka arī, ka elementa x *attēls* ir elements y, bet elementa y *pirmtēls* ir elements x. Vispārīgs pieraksts

$$f : X \multimap\!\!\rightarrow Y \quad (\text{lieto arī pierakstu} \quad X \xrightarrow{f} Y)$$

norāda, ka f ir attēlojums ar starta kopu X un finiša kopu Y. Elementu $x \in X$ sauc par funkcijas f *argumentu* vai *neatkarīgo mainīgo*, bet $y \in Y$ — par *atkarīgo mainīgo*. Ja $X = Y$, tad saka, ka funkcija f attēlo kopu X sevī. Kopu

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \mid \exists y \in Y\ (f : x \mapsto y)\}$$

sauc par attēlojuma $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ *definīcijas apgabalu* (angliski "*domain*"). Savukārt kopu

$$\mathrm{Ran}(f) = \{y \mid \exists x \in X\ (f : x \mapsto y)\}$$

sauc par attēlojuma f *vērtību apgabalu* (angliski "*range*").

2.8. Definīcija. *Ja* $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ *un* $g : Z \multimap\!\!\rightarrow W$ *ir funkcijas, tad funkciju* $h : X \multimap\!\!\rightarrow W$*, kas definēta ar nosacījumu:*

$$\forall x \in X \quad h(x) = g(f(x)),$$

sauc par funkciju f *un* g *kompozīciju (jeb superpozīciju, jeb saliktu funkciju) un apzīmē* $g \circ f$*.*

Tātad funkciju kompozīcija $g \circ f$ ir trijnieks (X, W, H), kur

$$H = \{\, (x, w) \mid \exists y \in Y \cap Z\ (\, f : x \mapsto y \ \wedge\ g : y \mapsto w \,)\,\}.$$

Brīdinājums. Dažkārt funkciju kompozīcijas $g \circ f$ apzīmēšanai mēdz lietot pierakstu fg. Šai gadījumā parasti pieraksta $h(x)$ vietā lieto pierakstu xh. Tā rezultātā

$$xh = h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = xfg.$$

2.9. Piemērs. Ja $f : \mathbb{R} \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\to} \mathbb{R}$ un $f : \mathbb{R} \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\to} \mathbb{R}$ ir reāla argumenta funkcijas, kur

$$f(x) = 6\sqrt{x} \quad \text{un} \quad g(x) = \cos^3 x,$$

tad

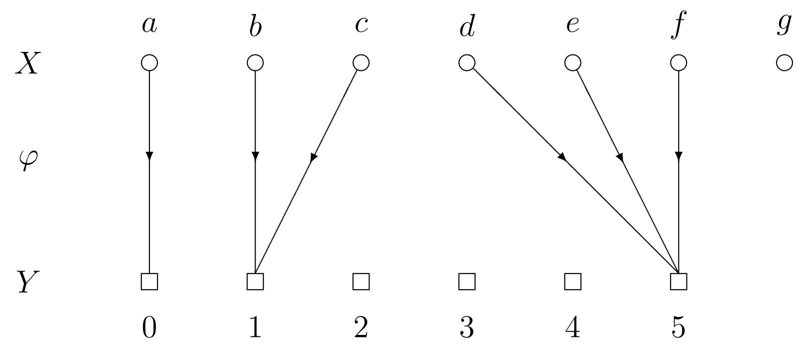
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos^3(6\sqrt{x}),$$

bet

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 6\sqrt{\cos^3 x}.$$

Tātad vispārīgā gadījumā $f \circ g \neq g \circ f$.

Funkcijas uzdošanas veidi.



2.3. zīm.

(i) *Aprakstošais funkcijas uzdošanas veids.* Atbilstības likumu starp kopu elementiem izsaka ar vārdiem. Tā, piemēram, 2.3. zīmējumā doto attēlojumu φ var pilnīgi raksturot ar teikumu: attēlojuma φ starta kopa sastāv no elementiem a, b, c, d, e, f; finiša kopa sastāv no skaitļiem 0,1,2,3,4,5; elementam a piekārtots skaitlis 0, gan elementam b, gan elementam c piekārtots skaitlis 1, savukārt elementiem d, e, f katram piekārtots skaitlis 5, elementam g attēlojums φ nav definēts.

(ii) *Grafiskais funkcijas uzdošanas veids.* Saskaņā ar attēlojuma definīciju jāuzdod starta un finiša kopas, kā arī grafiks.

a) Attēlojums ir pilnīgi noteikts, ja nofiksēta starta un finiša kopa, kā arī uzskaitīti visi atbilstošo elementu pāri. Tā, piemēram, 2.3. zīmējumā doto attēlojumu φ pilnīgi nosaka starta kopa $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, finiša kopa $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, kā arī grafika elementu saraksts

$$(a, 0), (b, 1), (c, 1), (d, 5), (e, 5), (f, 5).$$

Protams, šo paņēmienu var lietot tikai tad, ja attēlojuma grafiks ir galīgs un nesatur pārāk daudz elementu.

b) Attēlojumu var definēt ar tabulu iepriekš vienojoties kādas ir starta un finiša kopas. Tā, piemēram, 2.3. zīmējumā doto attēlojumu φ pilnīgi nosaka starta kopa $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, finiša kopa $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, kā arī tabula

Dom(φ)	a	b	c	d	e	f
Ran(φ)	0	1	1	5	5	5

c) Attēlojumu var definēt izmantojot dažnedažādus zīmējumus. Skatīt, piemēram, 2.3. zīmējumā definēto attēlojumu φ. Definējot skaitlisku funkciju grafiski, koordinātu plaknē tiek atzīmēti visi punkti, kuru abscisa ir funkcijas definīcijas apgabala elements (argumenta vērtība), bet ordināta — atbilstošais vērtību apgabala elements (funkcijas vērtība). Tā, piemēram, 2.2. zīmējumā redzams funkcijas $\lfloor x \rfloor$ sašaurinājums kopā $[-2; 4]$.

Analītiskais funkcijas uzdošanas veids. Skaitliskas funkcijas visbiežāk definē ar formulas vai procedūras palīdzību. Piemēram,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Šī formula izsaka, ka elementam 1 (t.i., skaitlim $x = 1$) ar likumu (kārtulu) f ir piekārtots skailis $f(1) = \frac{1}{2}$, elementam 2 ir piekārtots skaitlis $\frac{\sqrt{2}}{3}$, utt.

Visbeidzot jāpasvītro, ka aprakstītā klasifikācija ir nosacīta, tā, piemēram, analītisko funkcijas uzdošanas veidu ļoti bieži var arī uzskatīt par aprakstošo funkcijas uzdošanas veidu. Atcerieties kaut vai funkcijas $\lfloor x \rfloor$ definīciju.

Attēlojumu veidi. Attēlojumu $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ sauc par *visur definētu attēlojumu*, ja $\mathrm{Dom}(f) = X$. Šai gadījumā mēdz lietot vienu no apzīmējumiem

$$f : X \to Y \quad \text{vai} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Pretējā gadījumā attēlojumu $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ sauc par *daļēji definētu,* proti, ja

$$\exists x \in X \ x \notin \mathrm{Dom}(f).$$

2.10. Definīcija. *Funkciju $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ sauc par sirjekciju, ja*

$$\mathrm{Ran}(f) = Y.$$

Funkciju $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ *sauc par injekciju, ja dažādiem elementiem* $x_1, x_2 \in X$ *atbilst atšķirīgi elementi* $f(x_1), f(x_2) \in Y$*, t.i.,*

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ja visur definēts attēlojums $f : X \to Y$ *vienlaicīgi ir gan sirjekcija, gan injekcija, tad to sauc par bijekciju .*

2.11. Piemēri. Funkcija

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 1$$

ir visur definēta, tā ir gan sirjekcija, gan injekcija, tāpēc bijekcija, taču

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$$

kaut arī ir visur definēta funkcija nav nedz sirjekcija, nedz injekcija (skatīt 2.2. zīm.). Vēlāk, runājot par inversajām funkcijām, mēs konstatēsim, ka injekcijas ir tās "labās" funkcijas, kurām var meklēt inversās funkcijas.

Inversās funkcijas. Viens no veidiem, kā palielināt pazīstamo funkciju skaitu, ir apskatīt tā saucamās inversās jeb apvērstās funkcijas. Ideja ir šāda. Funkcija f piekārto elementam x_0 no definīcijas apgabala $\mathrm{Dom}(f)$ vienu vērtību y_0 no funkcijas f vērtību apgabala $\mathrm{Ran}(f)$. Ja mums ir palaimējies, tad eksistē inversā funkcija f^{-1}, t.i., katram y no $\mathrm{Ran}(f)$ pretējā ceļā var atrast to x no $\mathrm{Dom}(f)$, ka $f(x) = y$; f^{-1} definīcijas apgabals ir $\mathrm{Ran}(f)$, bet vērtību apgabals ir $\mathrm{Dom}(f)$.

2.12. Piemēri.

$$\text{Ja} \qquad y = 3x, \qquad \text{tad} \qquad x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\,y;$$

$$\text{ja} \qquad y = x^3 - 1, \qquad \text{tad} \qquad x = \sqrt[3]{y+1}.$$

Pieņemsim, ka F ir funkcijas $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ grafiks, tad

$$F^{-1} \rightleftharpoons \{\, (y,x) \mid (x,y) \in F \,\}.$$

2.13. Definīcija. *Trijnieku* $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$ *sauc par funkcijas* $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ *inverso jeb apvērsto funkciju, ja* f^{-1} *ir funkcija.*

Tagad pievērsiet uzmanību skolas kursā sniegtajam inversās funkcijas skaidrojumam [mēs ceram, ka lasītājs šo skaidrojumu atceras] un jūs sapratīsiet, kāpēc matemātiķi mūsdienās izšķīrušies par funkcijas definīciju, kas balstās uz kopu teorijas nostādnēm. Jā, vienreiz ir jāpārvar intelektuālais kūtrums, toties turpmākās teorijas daļas būvējamas pēc vienotas shēmas, un tāpēc kļūst pārskatāmākas.

2.14. Apgalvojums. *Ja funkcijai f eksistē inversā funkcija f^{-1}, tad funkcijai f^{-1} arī eksistē inversā funkcija un $(f^{-1})^{-1} = f$.*

□ Ja reiz funkcijai $f = (X, Y, F)$ eksistē inversā funkcija, tad trijnieks $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$ ir funkcija, un tādēļ ir jēga runāt par inversās funkcijas f^{-1} inverso funkciju

$$(f^{-1})^{-1} = (X, Y, (F^{-1})^{-1}).$$

Tā kā $(x, y) \in F \Leftrightarrow (y, x) \in F^{-1}$, tad

$$(F^{-1})^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in F^{-1} \} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in F \} = F .$$

Līdz ar to $(f^{-1})^{-1} = (X, Y, (F^{-1})^{-1}) = (X, Y, F) = f$. ■

2.15. Apgalvojums. *Ja funkcijai f eksistē inversā funkcija f^{-1}, tad*
(i) $\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \, [\, (f^{-1} \circ f)(x) = x \,]$ *un*
(ii) $\forall y \in \mathrm{Ran}(f) \, [\, (f \circ f^{-1})(y) = y \,]$.

□ Pieņemsim, ka $f = (X, Y, F)$, tad $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$, kur

$$F^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in F \}.$$

(i) Pieņemsim, ka $x \in \mathrm{Dom}(f)$, tad $(x, f(x)) \in F \wedge (f(x), x) \in F^{-1}$. No šejienes $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

(ii) Pieņemsim, ka $y \in \mathrm{Ran}(f)$, tad $\exists x \in X \, [\, (x, y) \in F \,]$, tāpēc $(y, x) \in F^{-1}$. No šejienes $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. ■

Taču ne katrai funkcijai eksistē inversā funkcija. Piemēram, $y = x^2$ vai $y = \sin x$. Būtisks kritērijs, lai funkcijai eksistētu inversā, ir šāds.

2.16. Teorēma. *Funkcijai f eksistē inversā funkcija f^{-1} tad un tikai tad, ja f ir injekcija.*

□ ⇒ Pieņemsim, ka funkcijai $f = (X, Y, F)$ eksistē inversā funkcija $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$, tad $F^{-1} = \{\, (y, x) \mid (x, y) \in F \,\}$. Tā kā f^{-1} ir funkcija, tad [2.7. definīcija]

$$\forall (y_1, x_1) \in F^{-1}\; \forall (y_2, x_2) \in F^{-1}\; [\, y_1 = y_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \,]. \tag{2.1}$$

Pieņemsim, ka funkcija f nav injekcija, tad

$$\exists u_1\; \exists u_2\; \exists v\; [\, u_1 \neq u_2 \;\wedge\; (u_1, v) \in F \;\wedge\; (u_2, v) \in F \,].$$

Tas nozīmē, ka $(v, u_1) \in F^{-1}$ un $(v, u_2) \in F^{-1}$, kas ir pretrunā ar (2.1). Tātad pieņēmums, ka f nav injekcija ir bijis kļūdains.

⇐ Pieņemsim, ka $f = (X, Y, F)$ ir injekcija, tad saskaņā ar 2.13. definīciju atliek pierādīt, ka $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$ ir funkcija. Tas nozīmē, ka mums jāprot pierādīt nosacījums (2.1) jeb ekvivalentā formā

$$\forall (x_1, y_1) \in F\; \forall (x_2, y_2) \in F\; [\, x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; y_1 \neq y_2 \,].$$

Bet tas taču nav nekas cits, kā apgalvojums, ka f ir injekcija. Tā kā f saskaņā ar doto ir injekcija, tad tas arī ir viss pierādījums. ■

Šī teorēma nepārprotami norāda, ka trigonometriskām funkcijām inversās funkcijas neeksistē visā definīcijas apgabalā. Bet mēs varam izvēlēties tādus intervālus, kuros trigonometriskās funkcijas ir injekcijas. Tās gan vairs nebūs pašas trigonometriskās funkcijas, bet to sašaurinājumi, toties šiem sašaurinājumiem, ja tie izvēlēti kā injekcijas, eksistē inversās funkcijas. Neko darīt, jāsamierinās ar šo funkciju sašaurinājumiem.

2.17. Definīcija. *Funkciju* $f : X_1 \to Y$ *sauc par funkcijas* $g : X_2 \to Y$ *sašaurinājumu kopā* X_1 *, ja* $X_1 \subseteq X_2$ *un* $\forall x \in X_1\; f(x) = g(x)$ *. Šajā situācijā mēdz lietot apzīmējumu* $f = g|X_1$ *.*

2.18. Definīcija. *Funkcijas* $y = \sin x|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *inverso funkciju sauc par arksinusu. Raksta* $y = \arcsin x$*, lasa "y ir arksinuss no x".*

Funkcijas $y = \cos x|[0, \pi]$ *inverso funkciju sauc par arkkosinusu. Raksta* $y = \arccos x$*, lasa "y ir arkkosinuss no x".*

Funkcijas $y = \mathrm{tg} x|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *inverso funkciju sauc par arktangensu. Raksta* $y = \mathrm{arctg}\, x$*, lasa "y ir arktangenss no x".*

Funkcijas $y = \mathrm{ctg} x|]0, \pi[$ *inverso funkciju sauc par arkkotangensu. Raksta* $y = \mathrm{arcctg}\, x$*, lasa "y ir arkkotangenss no x".*

Tradicionāli visur definētu attēlojumu $f : X^n \to X$ sauc par algebrisku n–vietīgu operāciju, taču šis termins mūsdienās tiek lietots arī vispārīgākās situācijās. Tā rezultātā atšķirība starp attēlojumu un algebrisku operāciju ir nosacīta un bieži saistīta ar attiecīgās matemātikas nozares tradīcijām.

2.19. Piemērs. Saskaitīšana $(+)$ un reizināšana $(\cdot)$ ir divvietīgas algebriskas operācijas reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, taču dalīšana $(:)$ nav algebriska operācija reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$.

3. nodaļa

MATEMĀTISKĀ INDUKCIJA

Matemātiskās indukcijas metode. Kopas uzdošana ar induktīvu konstrukciju. Ņūtona binoma formula.

Matemātiskās indukcijas metode (princips) vienkāršākajā izskatā ir šāda

$$\frac{P(0), \quad \forall x \in \mathbb{N}\ (P(x) \Rightarrow P(x+1))}{\forall x \in \mathbb{N}\ P(x)}$$

Pielietojot matemātiskās indukcijas metodi, parasti visus spriedumus sadala 3 soļos:

1. solis — pārbauda izteikuma $P(0)$ patiesumu;

2. solis — pieņem, ka $P(x)$ ir patiess kādai patvaļīgi fiksētai vērtībai $x = n$ un, vadoties no šī pieņēmuma, pierāda, ka $P(x)$ ir patiess arī x vērtībai $n + 1$;

3. solis — pamatojoties uz matemātiskās indukcijas metodi, secina, ka jebkuram naturālam skaitlim n izteikums $P(n)$ ir patiess.

1. soli parasti sauc par *indukcijas bāzi*, 2. soli — par *induktīvo pāreju.* 2. solī jāpierāda izteikums

$$\forall x \in \mathbb{N}\ (P(x) \Rightarrow P(x+1)).$$

Tātad jāpierāda, ka patvaļīgam x izteikums $P(x+1)$ ir patiess, ja pieņem par dotu, ka patiess izteikums $P(x)$. Šai situācijā apgalvojumu $P(x)$ mēdz saukt par *induktīvo pieņēmumu.*

Nekas principiāli nemainās, ja kopas $\mathbb{N}$ vietā aplūko kopu

$$\mathbb{N}_k \leftharpoondown \mathbb{N} \setminus \overline{0, k-1}.$$

Tagad matemātiskās indukcijas metode izskatās šādi

$$\frac{P(k), \quad \forall x \in \mathbb{N}_k \ (P(x) \Rightarrow P(x+1))}{\forall x \in \mathbb{N}_k \ P(x)}$$

Parasti indukcijas bāze pierādāma samērā viegli, bieži vien pat triviāli. Grūtākā spriedumu daļa slēpjas induktīvajā pārejā.

3.1. Piemēri.

(i)
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lielākas uzskatāmības labad pieņemsim, ka

$$P_k(n) \leftharpoondown 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$P_l(n) \leftharpoondown \frac{n(n+1)}{2}$$

Indukcijas bāze: ja $n = 1$, tad

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Tātad apgalvojums $P_k(1) = P_l(1)$ (apgalvojums, ko iegūst n vietā ievietojot 1) ir patiess.

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka formula $P_k(n) = P_l(n)$ ir pareiza, t.i.,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tas ir induktīvais pieņēmums. Mums tagad jāparāda: no šejienes izriet, ka pareiza ir arī formula $P_k(n+1) = P_l(n+1)$, t.i.,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Pats pierādījums ir šāds

$$
\begin{aligned}
P_k(n+1) &= 1+2+3+\ldots+n+(n+1) \\
&= P_k(n)+(n+1) \\
&= P_l(n)+n+1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P_l(n+1)
\end{aligned}
$$

(ii) $$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,, \quad \text{ja tikai} \quad q \neq 1\,.$$

Līdzīgi kā iepriekšējā piemērā lielākas uzskatāmības labad pieņemsim, ka

$$
\begin{aligned}
Q_k(n) &\leftharpoondown 1+q+q^2+\ldots+q^n \\
Q_l(n) &\leftharpoondown \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

Indukcijas bāze: ja $n=1$, tad

$$Q_k(1) = 1+q = \frac{1-q^2}{1-q} = Q_l(1)$$

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka formula $Q_k(n) = Q_l(n)$ ir pareiza, t.i.,

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Tas ir induktīvais pieņēmums. No šejienes

$$\begin{aligned}
Q_k(n+1) &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} \\
&= Q_k(n) + q^{n+1} \\
&= Q_l(n) + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = Q_l(n+1)
\end{aligned}$$

Matemātiskās indukcijas principam ir dažnedažādas modifikācijas. Īsumā pārskaitīsim biežāk lietotās.

$$\frac{P(0), \quad \forall x \in \mathbb{N}\ [\forall y \in \overline{0,x}\ P(y) \Rightarrow P(x+1)]}{\forall x \in \mathbb{N}\ P(x)}$$

Šis princips izmantojams šādi: lai pierādītu, ka apgalvojums $P(x)$ ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, ir jāveic šādas darbības:

1) jāpierāda, ka izteikums $P(0)$ ir patiess;

2) jāpieņem par dotu, ka patiesi visi izteikumi $P(0), P(1), \ldots, P(x)$, un jāpierāda, ka tad izteikums $P(x+1)$ ir patiess.

Nekas principiāli nemainās, ja kopas $\mathbb{N}$ vietā aplūko kopu $\mathbb{N}_k$. Tagad matemātiskās indukcijas metode izskatās šādi

$$\frac{P(k), \quad \forall x \in \mathbb{N}_k\ [\forall y \in \overline{k,x}\ P(y) \Rightarrow P(x+1)]}{\forall x \in \mathbb{N}_k\ P(x)}$$

3.2. Piemērs. Pierādīsim apgalvojumu: katram naturālam skaitlim, kas lielāks par 1 eksistē pirmskaitlis, kas to dala.

Formālā pierakstā tas izskatās šādi: $\forall n \in \mathbb{N}_2 \exists p \in \mathbb{P}\ p \backslash n$.

$\square$ Indukcijas bāze: ja $n = 2$, tad $2 \in \mathbb{P}$ un $2 \backslash 2$. Tātad apgalvojums $\exists p \in \mathbb{P}\ p \backslash 2$ (apgalvojums, ko iegūst n vietā ievietojot 2) ir patiess.

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka apgalvojums $\exists p \in \mathbb{P}\ p \backslash k$ ir patiess visiem $k \in \overline{2, n}$.

Katrs naturāls skaitlis $m > 1$ dalās ar vismaz 2 naturāliem skaitļiem — ar sevi, t.i., m un skaitli 1. Ja $n+1$ dalās tikai ar diviem skaitļiem, tad tas ir pirmskaitlis, un apgalvojums ir pierādīts. Ja $n+1$ dalās vēl ar kādu naturālu skaitli k, tad $2 \leq k \leq n$. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\exists p \in \mathbb{P}\ p \backslash k$, un tāpēc $p \backslash (n+1)$. $\blacksquare$

$$\frac{P(a), \quad \forall x \in \mathbb{N}\ [(a \leq x < b \land P(x)) \Rightarrow P(x+1)]}{\forall x \in \mathbb{N}\ [a \leq x < b \Rightarrow\ P(x)]}$$

Šis princips izmantojams šādi: lai pierādītu, ka apgalvojums $P(x)$ ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, kas apmierina nevienādību $a \leq x < b$, ir jāveic šādas darbības:

1) jāpierāda, ka izteikums $P(a)$ ir patiess;

2) jāpieņem par dotu, ka $a \leq x < b$ un izteikums $P(x)$ ir patiess, un jāpierāda, ka tad izteikums $P(x+1)$ ir patiess.

$$\frac{\begin{array}{l} P(0), P(1) \\ \forall x \in \mathbb{N}\ [(P(x) \land P(x+1)) \Rightarrow P(x+2)] \end{array}}{\forall x \in \mathbb{N}\ P(x)}$$

Šis princips izmantojams šādi: lai pierādītu, ka apgalvojums $P(x)$ ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, ir jāveic šādas darbības:

1) jāpierāda, ka abi izteikumi $P(0)$ un $P(1)$ ir patiesi;

2) jāpieņem par dotu, ka abi izteikumi $P(x)$ un $P(x+1)$ ir patiesi, un jāpierāda, ka tad izteikums $P(x+2)$ ir patiess.

Tikko aplūkotās metodes tiešs vispārinājums ir nākošais princips.

$$\frac{\begin{array}{l} P(0), P(1), \ldots, P(m-1), \\ \forall x \in \mathbb{N}\ [(P(x) \land P(x+1) \land \ldots \land P(x+m-1)) \Rightarrow P(x+m)] \end{array}}{\forall x \in \mathbb{N}\ P(x)}$$

Šis princips izmantojams šādi: lai pierādītu, ka apgalvojums $P(x)$ ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, ir jāveic šādas darbības:

1) jāpierāda, ka visi izteikumi $P(0), P(1), \ldots, P(m-1)$ ir patiesi;

2) jāpieņem par dotu, ka visi izteikumi $P(x), P(x+1), \ldots, P(x+m-1)$ ir patiesi, un jāpierāda, ka tad izteikums $P(x+m)$ ir patiess.

$$\frac{\begin{array}{l} P(0), P(1), \\ \forall x \in \mathbb{N}\, [P(x) \Rightarrow P(x+2)] \end{array}}{\forall x \in \mathbb{N}\; P(x)}$$

Šis princips izmantojams šādi: lai pierādītu, ka apgalvojums $P(x)$ ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, ir jāveic šādas darbības:

1) jāpierāda, ka abi izteikumi $P(0)$ un $P(1)$ ir patiesi;

2) jāpieņem par dotu, ka izteikums $P(x)$ ir patiess, un jāpierāda, ka tad izteikums $P(x+2)$ ir patiess.

Tikko aplūkotais princips balstās uz to, ka katras naturāls skaitlis ir vai nu pāra, vai nepāra skaitlis. Ja x ir pārskaitlis, tad atceramies, ka $P(0)$ ir patiess, bet līdz ar to ir patiess $P(2)$, pēc tam secināms, ka patiess ir izteikums $P(4)$, utt. līdz $P(x)$. Ja x ir nepārskaitlis, tad analoģisku spriedumu virkne sāksies ar $P(1)$.

Šo metodi, acīmredzot, var vispārināt, ņemot 2 vietā patvaļīgu naturālu skaitli $m > 2$.

$$\frac{\begin{array}{l} P(0), P(1), \ldots, P(m-1), \\ \forall x \in \mathbb{N}\, [P(x) \Rightarrow P(x+m)] \end{array}}{\forall x \in \mathbb{N}\; P(x)}$$

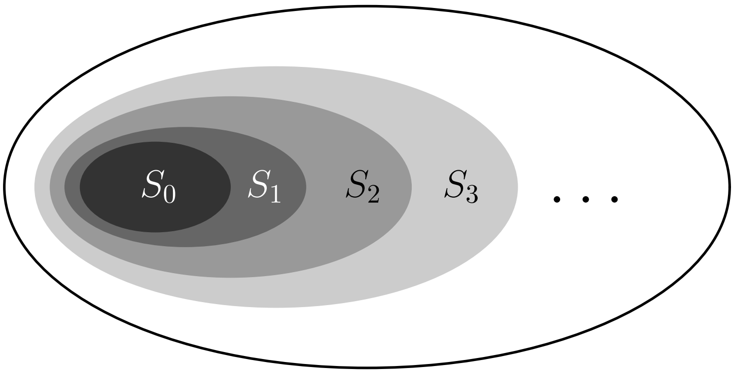
Šis princips izmantojams šādi: lai pierādītu, ka apgalvojums $P(x)$ ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, ir jāveic šādas darbības:

1) jāpierāda, ka visi izteikumi $P(0), P(1), \ldots, P(m-1)$ ir patiesi;

2) jāpieņem par dotu, ka izteikums $P(x)$ ir patiess, un jāpierāda, ka tad izteikums $P(x+m)$ ir patiess.

Ja reiz matemātiķi ir akceptējuši matemātiskās indukcijas principu, tad kāpēc gan to neizmantot definējot dažādas kopas. Vienkāršākajā gadījumā tas nozīmē, ka jāuzdod kopa $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, kur kopas A elementus definē izmantojot shēmu:

$$\begin{aligned} a_0 &= a; \\ a_{n+1} &= \mathfrak{f}(a_n). \end{aligned}$$



3.1. zīm.: Kopas S definīcija ar vispārināto indukciju.

Te $\mathfrak{f}$ ir kāda fiksēta procedūra (algoritms). Jēdzienu algoritms mūsdienu matemātikā definē, taču šī kursa ietvaros jēdzienu "algoritms" lietosim intuitīvā nozīmē ar to saprotot viennozīmīgi fiksētu procesu, kas apstrādā kaut kādus dotos datus.

3.3. Piemērs. Pieņemsim, ka $A \leftrightharpoons \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, kur kopas A elementi definēti izmantojot šādu shēmu:

$$a_0 = \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{a_n}}}.$$

3.4. Vingrinājums. Pierādīt, ka visi kopas A elementi ir mazāki par skaitli 1!

Vispārīgā gadījumā kopas var definēt izmantojot tā saukto vispārināto indukcijas metodi (principu).

1. solis — nofiksējam sākotnējo kopu S_0;

2. solis — nofiksējam *izveduma likumus* $\mathfrak{F}$.

Kopu S_0' definējam kā kopu, kas iegūta no kopas S_0 elementiem izmantojot izveduma likumus $\mathfrak{F}$. Tagad kopu S_1 definējam kā apvienojumu

$S_1 \leftharpoondown S_0 \cup S_0'$. Nākošajā solī definējam kopu S_1' kā kopu, kas iegūta no kopas S_1 elementiem izmantojot izveduma likumus $\mathfrak{F}$, un definējam S_2 kā apvienojumu $S_2 \leftharpoondown S_1 \cup S_1'$. Tā rezultātā iegūstam kopu virkni

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$$

Visbeidzot definējam $S \leftharpoondown \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} S_k$. Dotās shēmas ilustrāciju skatīt 3.1. zīmējumā.

3.5. Piemērs. Pieņemsim, ka

$$\begin{aligned} o : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad &: \quad x \mapsto 0; \\ s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad &: \quad x \mapsto x+1; \\ u_m^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \quad &: \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_m, \end{aligned}$$

visiem $m \in \overline{1,n}$.

$$S_0 \leftharpoondown \{o, s\} \cup \{u_m^n \mid n \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ un } \ m \in \overline{1,n}\}$$

Izveduma likumi $\mathfrak{F}$. Īsāka pieraksta labad lietosim vektoriālu pierakstu, proti, ja $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ir n argumentu funkcija, tad

$$f(\bar{x}) \leftharpoondown f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(i) Ja

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}, \\ g_1 \quad &: \quad \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \\ g_2 \quad &: \quad \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_m \quad &: \quad \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

ir kopas X funkcijas, tad

$$h(\bar{x}) \leftharpoondown f(g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \ldots, g_m(\bar{x}))$$

ir kopas X funkcija.

Šai gadījumā saka, ka funkcija h ir funkciju $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ *kompozīcija*.

(ii) Ja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \\ g &: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

ir kopas X funkcijas, tad $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, kas definēta induktīvi ar nosacījumiem

$$\begin{cases} h(\bar{x}, 0) & \leftharpoondown \quad f(\bar{x}); \\ h(\bar{x}, y+1) & \leftharpoondown \quad g(\bar{x}, y, h(\bar{x}, y)) \end{cases}$$

ir kopas X funkcija.

Šai gadījumā saka, ka funkcija h ir iegūta no funkcijām f un g ar *primitīvi rekursīvās shēmas* palīdzību.

Saskaņā ar vispārināto indukcijas principu tikko aprakstītā procedūra definē kādu kopu S. Algoritmu teorijā šādi definētās kopas S elementus (šoreiz kopas S elementi ir funkcijas) sauc par *primitīvi rekursīvām funkcijām.*

Ņūtona binoma formula Cerams, ka lasītājam jau no skolas laikiem labi zināmas šādas formulas

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Mūsu tuvākais mērķis: pierādīt līdzīgu formulu patvaļīgam naturālam kāpinātājam, proti,

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\ &= \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1}b + \binom{n}{n} a^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{aligned}$$

Taču vispirms jāpaskaidro, ko nozīmē apzīmējums $\binom{n}{k}$.

Skaitli

$$n! \leftharpoondown \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad n = 0; \\ n(n-1)!, & \text{ja} \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

sauc par n *faktoriālu.* Savukārt skaitli

$$C_n^k \rightleftharpoons \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \rightleftharpoons \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sauc par *kombināciju skaitu no n elementiem pa k elementiem*; te $k \leq n$. Uzreiz no definīcijas izriet, ka

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

3.6. Lemma. *Ja $k < n$, tad*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

□

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.7. Teorēma. *Ja $n \in \mathbb{N}$, tad*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k} \tag{3.1}$$

□ Pierādījumā izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze: ja $n = 0$, tad

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$$

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka formula (3.1) ir pareiza. Tagad izmantojot gan induktīvo pieņēmumu, gan 3.6. Lemmu veicam šādus pārveidojumus

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{0} ab^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^n b + a^{n+1} \\
&+ b^{n+1} + \binom{n}{1} ab^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b \\
&= b^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) ab^n + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right) a^2 b^{n-1} \\
&+ \ldots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right) a^2 b^{n-1} + a^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \binom{n+1}{1} ab^{n+1-1} + \binom{n+1}{2} a^2 b^{n+1-2} \\
&+ \ldots + \binom{n+1}{n} a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \blacksquare
\end{aligned}$$

4. nodaļa

IZTEIKUMI

Matemātiskās loģikas priekšmets. Izteikumi, to patiesumvērtības. Vienkārši un salikti izteikumi. Loģiskās operācijas, to definīcijas ar patiesumvērtību tabulām.

Matemātisko loģiku var uzskatīt par formālo loģiku, kas lieto matemātiskas metodes un matemātiska tipa simboliku. Matemātiskās loģikas lietojumi saistāmi ar tādām matemātikas disciplīnām, kā: matemātikas pamati, kopu teorija, izvedumu teorija, algebra. Mūsdienās dažnedažādi matemātiskās loģikas virzieni nopietni attīstās teorētiskās datorzinātnes paspārnē. Tieši datorzinātnes ienākšana mūsu dzīvē nopietni veicina matemātiskās loģikas attīstību. Atzīmēsim, ka matemātiskās loģikas atziņas lieto arī fizikā, bioloģijā, valodniecībā, jurispudencē un tehnikā (īpaši elektronikā, automātisku ierīču projektēšanā, tai skaitā, robotu).

Atkārtojam, attīstītas teorijas pamatiezīme ir "spēles noteikumu" fiksēšana. Izrādās, lai korekti uzbūvētu teoriju, jāfiksē ne tikai pamatjēdzieni un aksiomas, bet jāvienojas arī par spriedumu sistēmu jeb loģiku, kas būs par pamatu apgalvojumu un teorēmu pierādījumos. Klasiskās matemātiskās loģikas vienkāršāko daļu, proti, izteikumu loģiku izdodas reducēt līdz "melnbaltai pasaulei". Kāda tad ir šī "melnbaltā pasaule"? Par pamatjēdzieniem izvēlas *izteikumus.* Intuitīvi, izteikumi ir apgalvojumi, kas ir vai nu patiesi vai aplami (t.i., kļūdaini). Tie noteikti nav nedz jautājuma, nedz izsaukuma teikumi. Izteikumu loģikas uzdevums — precizēt matemātikā lietoto vārdu: "un", "vai", "nav tiesa, ka", "ja ..., tad ...", "tad un tikai tad" saturu.

Tātad izteikuma jēdziens ir pamatjēdziens un netiek definēts. Situācija ir tāda, ka no izteikumu loģikas viedokļa raugoties, nav vēl vienkāršāku jēdzienu, uz kuriem varētu reducēt jēdzienu par izteikumu. Kā jau iepriekš minējām, aprakstoši paskaidrojot, var teikt, ka par izteikumu saucam tādu apgalvojumu, kas ir vai nu *patiess*, vai *aplams*. Tā rezultātā parādās arī *patiesumvērtības* jēdziens, kas arī ir pamatjēdziens.

Tagad sniegsim šo jēdzienu detalizētāku skaidrojumu. Lūk, daži izteikumu piemēri:

- Nedēļā ir septiņas dienas.
- Rīga nav Francijas galvaspilsēta.
- Katra punktā x_0 diferencējama funkcija ir nepārtraukta šai punktā.

Šie apgalvojumi ir uzskatāmi par izteikumiem, turklāt — patiesiem izteikumiem. Taču izteikumiem obligāti nav jābūt patiesiem. Kā izteikumu piemēri noder arī šādi aplami izteikumi:

- Nedēļā ir deviņas dienas.
- Rīga ir Francijas galvaspilsēta.
- Katra segmentā $[a; b]$ integrējama funkcija ir nepārtraukta šai intervālā.

4.1. Vingrinājums. Vai teikums:
— Rīga ir Francijas, bet Berlīne ir Vācijas galvaspilsēta, — ir izteikums?

Arī izteiksmes

- $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} > 1,$
- $2 < \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n < 3,$

kas pašas nav stāstījuma teikumi parastā nozīmē, ir izteikumi. Tas demonstrē, ka izteikuma pierakstam var lietot ne tikai dabisko valodu alfabētus, bet arī dažādas "mākslīgas" zinātnes valodas. Ja raugāmies no gramatikas viedokļa, visi aplūkotie izteikumu piemēri ir stāstījuma teikumi. Taču ne katrs stāstījuma teikums ir izteikums.

- Četrstūri sauc par rombu, ja tā visas malas ir vienlielas.

Šis teikums pēc formas ir definīcija, taču tajā neko neapgalvo, ja nu vienīgi to, kādu objektu turpmāk sauksim par rombu. Arī citas definīcijas nav izteikumi.

Izteikumu loģika interesējas tikai par par tādiem teikumiem, par kuriem potenciālā nozīmē var konstatēt, vai apgalvojums ir paties vai aplams. Tai pašā laikā nav nepieciešams zināt vai pat prast noskaidrot, kāda konkrētajam izteikumam ir patiesumvērtība. Svarīgi ir tikai, lai varētu rēķināties ar to, ka izteikumam tāda patiesumvērtība ir. Piemēram, teikums:

- Skaitļa π decimālizvirzījumā cipars 7 ieiet bezgala daudz reižu.

ir nevainojams izteikums, kaut arī ir apšaubāmi, vai kāds no lasītājiem zin pareizo atbildi.

Tai pašā laikā teikumi:

- Kur tu skriesi, vanadziņi?
- Nāc nākdama, Jāņu diena!

nav uzskatāmi par izteikumiem. Vispār (kā jau iepriekš minējām) teikumus, kas izteic jautājumu vai pavēli neuzskata par izteikumiem.

Sacītais var vedināt uz domām, ka par izteikumu sauc katru teikumu, kuram ir apgalvojuma raksturs. Gluži tā tas tomēr nav.

- Skatļa 7 otrā diagonāle ir zaļa.
- Skaitlis 456 223 376 ir diezgan liels skaitlis.

Pirmais teikums ir absurda literatūras piemērs, un tam nevar piekārtot patiesuma vērtību satura nesaprotamības dēļ. Otrais piemērs arī nav izteikums, vismaz tik ilgi, kamēr neesam noprecizējuši, kā jāsaprot termins "diezgan liels skaitlis". Galu galā absurda literatūras cienītāji var iebilst:

— Katrs inteliģents cilvēks saprot teikumu

- Dzejnieks devās izjādē pa mākoņu kalniem ar savu mīļoto Pegazu.

Tā rezultātā var izrādīties, ka doto teikumu vienā gadījumā mēs atzīstam par izteikumu, bet citā — nē! Viss atkarīgs no konteksta.

Vēl vairāk — ne katrs apgalvojums ir izteikums pat tad, ja tas formulēts korekti un saprotami. Piemēram, teikumu

- Skaitlis n ir pārskaitlis.

neuzskata par izteikumu. Iemesls ir tas, ka nav iespējams noteikt šī apgalvojuma patiesuma vērtību pārak mazas informācijas dēļ. Apgalvojums

- Skaitlis 4 ir pārskaitlis.

ir patiess izteikums. Savukārt apgalvojums

- Skaitlis 5 ir pārskaitlis.

ir aplams izteikums. Šai piemērā, mainīgā lieluma n vietā ievietojot konkrētas piemērotas vērtības iegūstam izteikumus. Šādas izteiksmes mēdz saukt par *izteikumformām.* Matemātiskā loģika nodarbojas arī ar šādas formas apgalvojumiem, taču tas notiek nevis izteikumu, bet gan predikātu loģikas ietvaros.

Rezumējot (nedaudz atkārtojoties) varētu sacīt, ka par izteikumu sauc teikumu ar apgalvojuma raksturu, ja ir jēga runāt par šī teikuma patiesuma vērtību, t.i., ja principā var konstatēt, vai apgalvojums ir patiess vai aplams.

Brīdinājums. Pēc sava formulējuma iepriekšējā rindkopa atgādina definīciju, taču jāpasvītro, ka tā te nav domāta kā definīcija (vismaz tai nozīmē kā šo jēdzienu lieto matemātiķi). Pretējā gadījumā nāktos tālāk paskaidrot (definēt), ko nozīmē jēdzieni

- teikums, apgalvojums, jēga, patiesums.

Tātad iepriekšējā rindkopa uzskatāma par aprakstošu paskaidrojumu, ne vairāk.

Atgādināsim, ka jēdziens par patiesumvērtību arī tiek lietots bez definīcijas. Intuitīvi mēs uzskatām par patiesiem tos izteikumus, kuru saturs atbilst objektīvajai realitātei. Taču zinātnē ar tik sažuburotu abstrakciju sistēmu, kāda ir matemātika, jautājums par kāda apgalvojuma atbilstību objektīvajai realitātei ir ļoti sarežģīts.

Izteikumu piemēri neierobežotā skaitā atrodami katrā zinātnē — matemātikā, datorzinātnēs, fizikā, ķīmijā, bioloģijā. Tas pats attiecas uz ikdienas valodu sadzīvē. Izteikumu loģika abstrahējas no izteikumu satura, un vienīgās īpašības, kurām tā pievērš uzmanību ir izteikumu loģiskā struktūra un patiesuma vērtība. Var teikt, ka mēs visus izteikumus sadalam divās klasēs — patiesajos un aplamajos. Norunāsim turpmāk izteikumus apzīmēt ar lielajiem burtiem

$$A, B, C, \ldots$$

Ar mazo burtu

$$p$$

apzīmēsim izteikumu, par kuru zināms, ka tas ir patiess, bet ar

$$a$$

apzīmēsim aplamu izteikumu. Pieraksts

$$A \sim B$$

nozīmē, ka izteikumiem A un B ir vienādas patiesuma vērtības. Speciālā gadījumā pieraksts

$$A \sim p$$

izsaka to pašu, ko teikums:

— izteikums A ir patiess. Savukārt pieraksts

$$A \sim a$$

norāda, ka izteikums A ir aplams.

Jānorāda, ka ilustrācijās, kas ņemtas no ikdienas dzīves, bieži vien par izteikumiem tiek uzskatīti apgalvojumi, kas stingri ņemot, nav izteikumi, bet kļūtu par tādiem tikai pie zināmu papildus nosacījumu pievienošanas. Tāds, piemēram, ir teikums

- Diena ir mākoņaina.

Precīzi runājot, to var uzskatīti par izteikumu ne agrāk, kā pēc tam, kad precizēta vieta un laiks, jo pretējā gadījumā mēs nevaram noteikt apgalvojuma patiesuma vērtību. Tomēr tekstā dažkārt mēs lietosim šādus piemērus. Tādu pieeju var attaisnot, jo līdzīgi piemēri ir derīgi neatkarīgi no tā, tieši kādā veidā izdarīts nepieciešamais precizējums. Bez tam pārāk skrupolozs nosacījumu uzskaitījums izklāstu bieži vien padara smagnēju un grūti uztveramu, jo novērš lasītāja uzmanību no lietas būtības.

Atzīmēsim, ka tikko aplūkotais piemērs var izraisīt ar citus iebildumus, kurus mēs turpmāk ignorēsim. Piemēram, cik daudz mākoņu jābūt pie debess juma, lai mēs uzskatītu, ka diena ir mākoņaina?

Izteikumus šķiro *vienkāršos un saliktos.* Izteikumus, kuru sastāvā nav citu izteikumu, sauc par vienkāršiem izteikumiem, bet pārejos sauc par saliktiem izteikumiem. Tātad saliktie izteikumi ir izveidoti no viena vai vairākiem citiem izteikumiem. Piebildīsim, ja saliktais izteikums B izveidots no viena izteikuma, teiksim, izteikuma A, tad izteikums B izteikumu A satur kā sastāvdaļu.

Brīdinājums. Līdzīgi kā situācijā ar izteikumiem, arī šai gadījumā iepriekšējā rindkopa nav jāuztver kā definīcija.

Tagad sniegsim detalizētāku skaidrojumu piedāvātajai klasifikācijai.

- Funkcija $y = \sin x$ nav diferencējama vai $y = \sin x$ ir nepārtraukta.

Šis teikums sastāv no diviem apgalvojumiem, proti,

- Funkcija $y = \sin x$ nav diferencējama.

un

- $y = \sin x$ ir nepārtraukta.

Ja izteikumu "Funkcija $y = \sin x$ nav diferencējama" apzīmējam ar A, bet izteikumu "$y = \sin x$ ir nepārtraukta" apzīmējam ar B, tad teikums "Funkcija $y = \sin x$ nav diferencējama vai $y = \sin x$ ir nepārtraukta." uzrakstāms ar formulu

$$A \vee B,$$

kur vārds "vai" apzīmēts ar simbolu $\vee$. Šī iemesla dēļ mēs izteikumu "Funkcija $y = \sin x$ nav diferencējama vai $y = \sin x$ ir nepārtraukta." klasificējam kā saliktu izteikumu.

Tradicionāli pieņemts, ka apgalvojumu C sauc par vienkāršu, ja tas ar formulu nav reprezentējams izskatā

$$\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B.$$

Te

$$\begin{array}{rll} \neg A & \text{apzīmē izteikumu:} & \text{nav tiesa, ka } A, \\ A \wedge B & \text{apzīmē izteikumu:} & A \text{ un } B, \\ A \vee B & \text{apzīmē izteikumu:} & A \text{ vai } B, \\ A \Rightarrow B & \text{apzīmē izteikumu:} & \text{ja } A, \text{ tad } B, \\ A \Leftrightarrow B & \text{apzīmē izteikumu:} & A \text{ tad un tikai tad, ja } B. \end{array}$$

Tā rezultātā vienkārši izteikumi ir apgalvojumi:

- Sokrāts ir cilvēks.
- Aija spēlējas ar Brenci.
- $3 > 1$.
- Funkcija $y = \sin x$ ir diferencējama.

Salikti izteikumi ir apgalvojumi:

- Ja Sokrāts ir cilvēks, tad Aija spēlējas ar Brenci.
- $3 > 1$ tad un tikai tad, ja $1 < 3$.
- Funkcija $y = \sin x$ nav diferencējama.

Šie pārspriedumi ļauj apgalvot, ka izteikums "Funkcija $y = \sin x$ nav diferencējama vai $y = \sin x$ ir nepārtraukta." klasificējams kā salikts izteikums. Ar formulu šis saliktais izteikums izsakāms šādi

$$\neg D \vee B,$$

kur

D	apzīmē vienkāršu izteikumu:	funkcija $y = \sin x$ ir diferencējama,
B	apzīmē vienkāršu izteikumu:	$y = \sin x$ ir nepārtraukta.

4.2. Vingrinājums. Teikumu:

- Šodien nav vasara vai ezeri ir brīvi no ledus.

uzrakstīt ar izteikumu loģikas formulu tā, lai katrs šai formulā ieejošais izteikums būtu vienkāršs! No kādiem vienkāršiem izteikumiem konstruēts šis teikums?

Kā jau iepriekš minējām izteikumu loģiku interesē tikai izteikumu patiesumvērtības (mēs taču sadalījām visus izteikumus divās klasēs: patiesajos un aplamajos) un šo izteikumu loģiskā struktūra. Loģiskās struktūras analīzi lielā mērā atvieglo vienošanās, kā nosakāma salikta izteikuma patiesumvērtība, ja zināmas šī izteikuma sastāvdaļu patiesumvērtības. Tā mēs nonākam pie loģiskās operācijas jēdziena.

- Loģiskā operācija ir operācija, kuras argumenti un arī rezultātā iegūstamās vērtības ir patiesumvērtības.

Šie pārspriedumi motivē šādu loģiskās operācijas definīciju.

4.3. Definīcija. *Algebrisku n–vietīgu operāciju* $o : \{a,p\}^n \to \{a,p\}$ *sauc par n-vietīgu loģisku operāciju.*

Izteikumu $\neg A$ sauc par izteikuma A *negāciju*, un lasa "negācija no A", "nav tiesa, ka A" vai arī "ne A", pie kam jaunā izteikuma patiesuma vērtību nosaka tabula:

A	$\neg A$
a	p
p	a

Šajā tabulā apkopotais nozīmē: ja izteikums A ir aplams (a), tad izteikums $\neg A$ ir patiess (p); un otrādi, ja izteikums A ir patiess, tad izteikums $\neg A$ ir aplams. Negācija ir vienvietīga loģiskā operācija.

Ieviesīsim arī četras divvietīgas loģiskās operācijas.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
a	a	a	a	p	p
a	p	a	p	p	a
p	a	a	p	a	a
p	p	p	p	p	p

Tabula definē divu izteikumu A un B *konjunkciju* $A \wedge B$, *disjunkciju* $A \vee B$, *implikāciju* $A \Rightarrow B$ un *ekvivalenci* $A \Leftrightarrow B$.

Noruna. Mēs sakām, ka tabula definē divu izteikumu konjunkciju, kaut precīzāk būtu teikt, ka tabula definē, kā nosakāma divu izteikumu konjunkcijas patiesumvērtība, ja zināmas to sastāvdaļu patiesumvērtības. Līdzīga noruna attiecas arī uz pārejām loģiskām operācijām.

Pierakstu $A \wedge B$ lasa "A un B" vai arī "A konjunkcija B". Pierakstu $A \vee B$ lasa "A vai B" vai arī "A disjunkcija B". Pierakstu $A \Rightarrow B$ lasa "ja A, tad B", "no A seko B" vai arī "A implicē B". Pierakstu $A \Leftrightarrow B$ lasa "A tad un tikai tad, ja B" vai arī "A ekvivalents B".

Izteikumus A un B sauc par *konjunkcijas* $A \wedge B$ (*disjunkcijas* $A \vee B$) *locekļiem.* Izteikumu A sauc par implikācijas $A \Rightarrow B$ *premisu, nosacījumu* jeb *antecedentu*, izteikumu B — par *secinājumu* jeb *sukcedentu.* Izteikumu A sauc par ekvivalences $A \Leftrightarrow B$ *kreiso pusi*, bet izteikumu B — par *labo pusi.* Satriecošākais šajā loģikā bez šaubām ir šāda teikuma patiesums:

- Ja zirgs lido apraudzīt trejdeviņas zemes, tad trešdienās pūš patīkams dienvidvējš.

Bet ievērosim, mēs dzīvojam "melnbaltā pasaulē" un interesējamies tikai par loģiskās secināšanas likumību. Izejas premisa taču ir aplama, tāpēc pašā loģiskās secināšanas darbībā mēs nesaskatām nekādus trūkumus. Lai arī cik šāda secināšanas shēma mums liktos primitīva, tomēr gandrīz visa matemātika būvēta tieši uz šiem pamatiem. Kamēr, izmantojot matemātiku, vilcieni, kuģi un lidmašīnas kursē nevainojami, mums nav nopietna iemesla no tās atteikties, un tātad arī no klasiskās matemātiskās loģikas. It sevišķi vēl tādēļ, ka loģika ir vienkārša un ērti lietojama matemātiskos pierādījumos.

Šai vietā varētu arī pielikt punktu, taču interesi izraisa jautājums:

— Kāpēc tieši šādā veidā definētas loģiskās operācijas?

Matemātiskā idealizācija nozīmē, ka kaut kāda nematemātiska jēdziena matematizācijas gaitā tam piešķir dažas īpašības, kuras šim jēdzienam tā pirmveidā nav piemitušas. Šīs jaunās īpašības matemātisku teoriju ļauj izveidot pārskatāmāku un nav pretrunā ar realitāti.

Tipisks piemērs ir ģeometrija. Taisne ir neierobežota, kaut arī neviens cilvēks realitātē neko tādu nav redzējis. Jēdziens par neierobežota garuma taisni ir ļāvis izveidot mums pazīstamo ģeometriju, turpretī rīkošanās tikai ar nogriežņiem būtu ievērojami sarežģījusi ģeometrijas loģisko struktūru.

Līdzīgā veidā izteikumu loģika un tās likumi kļūtu neparocīgāki, ja mēs loģiskās operācijas ieviestu, kā daļēji definētus attēlojumus.

Negācijas saturs ir ļoti tuvs saikļa "ne" nozīmei dabiskā valodā. Varbūt pati vienkāršākā un dabiskākā no loģiskajām operācijām ir konjunkcija. Tās saturs visai precīzi atbilst saikļa "un" nozīmei dabiskā valodā.

Pirmās iebildes parasti saistās ar disjunkciju. Disjunkcija

- 2+2=5 vai $7 - 3 = 2$.

ir aplama, jo abi tās locekļi ir aplami. Patiesas ir disjunkcijas

- Zaķis ir augs vai trusis ir zīdītājs.

- Rēzekne ietek Lubānas ezerā vai Daugava ietek Babītes ezerā.
- 2+2=4 vai Talsi atrodas Kurzemē.

Kā redzams no pēdējā piemēra un disjunkcijas definīcijas saiklis "vai" pieļauj iespēju, ka patiesi ir abi apgalvojumi. Izslēdzošajam šķirošajam saiklim "vai" atbilst cita loģiskā operācija, ko definēsim vēlāk.

Izpratnes ziņā pati sarežģītākā no tikko definētajām loģiskajām operācijām ir implikācija. Pirmajā brīdi liekas, ka šī operācija izteic cēloņsakarību. Tā tas tomēr nav, piemēram, implikācija

- Ja Rīga ir Latvijas galvaspilsēta, tad diferencējamā funkcija $y = x^2$ ir nepārtraukta.

neizsaka nekādu saturisku cēloņsakarību. Ja nu vienīgi absurdās literatūras cienītāji te spēj saskatīt kādu cēloņsakarību. Neskatoties uz tikko izteikto pārliecinošo skepsi, saskaņā ar imlikācijas definīciju tikko aplūkotais izteikums "Ja Rīga ir Latvijas galvaspilsēta, tad diferencējamā funkcija $y = x^2$ ir nepārtraukta" ir patiess.

Nepareizi būtu domāt, ka implikācija katrā gadījumā norāda uz loģisku secinājumu šī termina ierastajā nozīmē. Patiesajā implikācijā

- Ja 2+2=4, tad diferencējama funkcija ir nepārtraukta.

secinājums nebūt loģiski neizriet no nosacījuma.

Un tomēr īstais iemesls, kāpēc izteikumu loģika aplūko implikāciju, ir tieši loģiskās secināšanas apraksts ar simboliskās loģikas metodēm. Šis loģiskās secināšanas likums ir

$$\text{modus ponens:} \qquad \frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$$

Vārdos tas izsakāms šādi:

- Ja patiesa ir implikācijas premisa A un patiesa ir pati implikācija $A \Rightarrow B$, tad patiess ir arī implikācijas secinājums B.

Tieši šādā un parasti tikai šādā situācijā implikāciju lieto tradicionālajā, nematemātiskajā loģikā. Taču mūsu uzdevums ir implikāciju definēt kā algebrisku divvietīgu operāciju, t.i., tai jābūt definētai visos četros iespējamos gadījumos.

Pie matemātiskās domāšanas nepieradušam lasītājam dažkārt liekas dīvaini, ka par patiesu atzīst implikāciju, kuras secinājums ir aplams, piemēram,

- Ja 2+2=5, tad $7 - 3 = 2$.

Iebildums parasti robežojas ar sašutumu:

— Bet $7 - 3$ taču nav 2!

— Jā, taču 2+2 arī nav 5.

Nedrīkst aizmirst, ka imlikācija izsaka nosacītu apgalvojumu: secinājums ir patiess, ja patiesa ir premisa. Nesaprātīgi būtu prasīt, lai no aplamas premisas pareiza sprieduma rezultātā tiktu iegūts patiess secinājums. Līdz ar to pašam spriedumam nav nekādas vainas. Tas motivē izvēli $a \Rightarrow a \sim p$.

Tāpat pirmajā brīdī ne labprāt atzīst par patiesu, piemēram, teikumu:

- Ja 2+2=5, tad $7 - 3 = 4$.

Tā ir implikācija ar aplamu premisu un patiesu secinājumu. Figurāli izsakoties:

— Pret ğenialitāti zāļu nav. Ja jau kāds ir tik apdāvināts, ka spēj izsecināt patiesus apgalvojumus arī no aplamām premisām, tad nav iemesla šādas spriešanas spējas ignorēt un atzīt par nederīgām. Pretējā gadījumā to jau vajadzētu raksturot ar vārdu skaudība.

Šī iemesla dēļ izvēlas definīciju $a \Rightarrow p \sim p$.

Parasti nekādas domstarpības nerada gadījums, kad implikācijas nosacījums patiess, bet secinājums aplams. Tādu apgalvojumu, bez šaubām, var uzskatīt par aplamu.

Ekvivalences saturs ir vienkāršs un dabisks: tās vērtība ir patiesa tajos gadījumos, kad abi argumenti ir ar vienādu patiesuma vērtību.

Protams viss sacītais nav jāuztver kā loģisko operāciju definīciju "pierādījums". Definīcijas atšķirībā no teorēmām vispār nepierāda! Nupat izdarītā analīze jāuztver kā motivācija, kāpēc tieši šādā veidā definētas mūsu izvēlētās loģiskās operācijas.

4.4. Vingrinājums. Teikumu:

- Ne Dienvidi, ne Ziemeļi neuzvarēja ASV pilsoņu karā.

uzrakstīt ar izteikumu loģikas formulu tā, lai katrs šai formulā ieejošais izteikums būtu vienkāršs! No kādiem vienkāršiem izteikumiem konstruēts šis teikums?

5. nodaļa

FORMULAS

Formulas, to patiesumvērtību tabulas.

Teoriju var attīstīt formāli nemaz neinteresējoties par tās saturu. Šo teorijas daļu sauc par *sintaksi.* Teorijas saturisko aspektu sauc par *semantiku.* Loģika savām vajadzībām veido speciālas mākslīgas simbolu valodas ar savu gramatiku, tādējādi it kā pilnībā atsakoties no parastās valodas. Specializētam nolūkam parocīgāka ir mākslīgā valoda. Tajā saglabāts tikai tas, kas nepieciešams noteiktam mērķim. Viss cits atmests kā nebūtisks vai pat traucējošs. Teorijas izklāsts ir cieši saistīts ar konkrētajai teorijai pieskaņoto mākslīgo valodu, tāpēc jēdzienus sintakse un semantika attiecina tieši uz teorijai pieskaņoto valodu.

Ja grib teikt, ka kāda valoda izmantota kā līdzeklis, lai aprakstītu un pētītu citu valodu, tad pirmo attiecībā pret otru sauc par *metavalodu.* Mēs šai kursa aprakstā kā metavalodu attiecībā pret matemātiskās loģikas valodām lietojam latviešu valodu. To valodu, par kuru ir runa un kas uzskatāma par mūsu pētījuma objektu, mēdz saukt par *objektvalodu.*

Katra valoda savu pierakstu veidošanai lieto zīmes — tā saucamos *elementāros simbolus.* Visu pieļaujamo elementāro simbolu sarakstu sauc par objektvalodas *alfabētu.* Parasti alfabēta elementi ir *konstruktīvas* dabas objekti. Grāmatu lapās iespiestie burti ir tipisks konstruktīvu objektu piemērs. No kopu teorijas viedokļa var uzskatīt, ka alfabēts un kopa ir sinonīmi (vismaz klasiskās matemātikas ietvaros). Alfabēta elementus, t.i., elementāros simbolus sauc arī par *burtiem.*

Pieņemsim, ka $\mathcal{A}$ ir alfabēts. Katru kopas

$$\mathcal{A}^+ \underset{\leftharpoondown}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}^n$$

elementu $u \in \mathcal{A}^+$ sauc par alfabēta $\mathcal{A}$ *netukšu vārdu.* Pieņemsim, ka

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_k), \qquad v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

ir alfabēta $\mathcal{A}$ netukši vārdi, tad

$$u\#v \underset{\leftharpoondown}{=} (u_1, u_1, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Šo kopā $\mathcal{A}^+$ definēto operāciju sauc par *konkatenāciju.*

Parasti vārda definīciju vēl papildina ar norunu, ka drīkst lietot arī tā saukto *tukšo vārdu*, kas nesatur nevienu burtu. Šis vārds ir, varētu sacīt, vienkārši tukša vieta. Vienosimies tukšo vietu apzīmēt ar grieķu burtu "lambda": λ.

Saskaņā ar norunu

$$\lambda\#\lambda \underset{\leftharpoondown}{=} \lambda, \qquad \forall u \in \mathcal{A}^+ \;\; \lambda\#u \underset{\leftharpoondown}{=} u \underset{\rightharpoondown}{=} u\#\lambda\,.$$

Kopu

$$\mathcal{A}^* \underset{\leftharpoondown}{=} \mathcal{A}^+ \cup \{\lambda\}$$

sauc par *alfabēta $\mathcal{A}$ vārdu kopu.* Kopas $\mathcal{A}^*$ elementus sauc par *vārdiem.* Kā tas tradicionāli pieņemts, ja nerodas pārpratumi, tad konkatenācijas operāciju izlaiž un lieto pierakstu

$$uv \underset{\leftharpoondown}{=} u\#v,$$

bez tam

$$u_1u_2\ldots u_k \underset{\leftharpoondown}{=} (u_1, u_2, \ldots, u_k).$$

Ja $a = u_1 = u_2 = \ldots = u_n$, tad lieto arī pierakstu $a^n \underset{\leftharpoondown}{=} u_1u_2\ldots u_n$. Savukārt $a^0 \underset{\leftharpoondown}{=} \lambda$.

Pieņemsim, ka $u \in \mathcal{A}^n$, tad skaitli n sauc par vārda u garumu, ko turpmāk apzīmēsim ar $|u|$. Saskaņā ar definīciju pieņemsim, ka $|\lambda| \underset{\leftharpoondown}{=} 0$.

Trijnieku (u, v, u') sauc par vārda v *ieeju* vārdā w, ja $w = uvu'$. Ja $a \in \mathcal{A}$ un $w \in \mathcal{A}^*$, tad ar $|w|_a$ apzīmēsim burta a dažādo ieeju skaitu vārdā v.

5.1. Piemērs. Trijnieks $(p, asaka, \lambda)$ ir vārda *asaka* ieeja vārdā *pasaka*. Atzīmēsim, ka $|pasaka|_a = 3$, t.i., burts a vārdā *pasaka* ieiet 3 reizes.

5.2. Definīcija. *Vārdu $v \in \mathcal{A}^*$ sauc par vārda $w \in \mathcal{A}^*$ dalītāju jeb apašvārdu, ja eksistē tādi $u \in \mathcal{A}^*$ un $u' \in \mathcal{A}^*$, ka $w = uvu'$. Šai situācijā vārdu u sauc par priedēkli, bet u' — par piedēkli. Ja $u \neq w$, tad u sauc par īstu priedēkli; līdzīgi, ja $u' \neq w$, tad u' sauc par īstu piedēkli.*

5.3. Definīcija. *Kopas $\mathcal{A}^*$ patvaļīgu apakškopu L sauc par valodu alfabētā $\mathcal{A}$. Ja kopa L ir galīga, tad valodu L sauc par galīgu valodu; līdzīgi, ja L ir bezgalīga kopa, tad valodu L sauc par bezgalīgu valodu.*

Izteikumu loģika nav izņēmums. Tātad lielā mērā attīstot izteikumu loģikas sintaksi var ignorēt iepriekšējā paragrāfā izklāstīto. Vismaz formulas definīcijai tas viss nav īpaši nozīmīgs.

5.4. Definīcija. *Alfabētu*

$$\mathcal{I} \leftrightharpoons \{\, \Delta,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ (,\ )\, \}$$

sauc par izteikumu loģikas alfabētu.

Alfabēta $\mathcal{I}$ vārdu (Δ^n) sauc par *mainīgu izteikumu*, īsāk — par *mainīgo*, ja tikai $\Delta^n \neq \lambda$. Burtus $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sauc par *loģisko operāciju zīmēm*. Burts

$\neg$	apzīmē	negāciju,
$\wedge$	—	konjunkciju,
$\vee$	—	disjunkciju,
$\Rightarrow$	—	implikāciju,
$\Leftrightarrow$	—	ekvivalenci.

Burtus (,) sauc par *iekavām*, attiecīgi

(	sauc par	*kreiso iekavu*,
)	sauc par	*labo iekavu*.

5.5. Definīcija. (i) *Katru mainīgo sauc par formulu.*

(ii) *Ja* $\mathfrak{A}$ *ir formula, tad* $(\neg\mathfrak{A})$ *sauc par formulu.*

(iii) *Ja* $\mathfrak{A}$ *un* $\mathfrak{B}$ *ir formulas, tad*

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$$

sauc par formulām.

Līdz ar to mēs esam definējuši izteikumu loģikas valodu alfabētā $\mathcal{I}$, ko īsuma labad apzīmēsim ar Frm. Šīs valodas vārdus mēs tikko nosaucām par formulām. Formulas definīcija ir rekursīva, citiem vārdiem sakot, kopa Frm definēta ar vispārināto indukcijas metodi.

5.6. Sekas. *Katras formulas pirmais burts ir kreisā iekava* (*, bet pēdējais — labā iekava*) *.*

Saskaņā ar formulas definīciju vārds $(\Delta\Delta)$ ir formula, ko mēs īsuma labad norunājām apzīmēt ar pierakstu (Δ^2). Tā rezultātā vārdi $(\Delta^6), (\Delta^9), (\Delta^{87})$ ir formulas, taču vārds $(\Delta^0) = (\lambda) = ()$ nav formula.

5.7. Definīcija. *Mainīgo* (Δ^n) *sauc par formulas* $\mathfrak{F} \in Frm$ *argumentu, ja vārds* (Δ^n) *ir vārda* $\mathfrak{F}$ *dalītājs.*

Īsāk to mēs formulēsim šādi:

— Formulā ieejošos mainīgos sauc par *formulas argumentiem.*

Arī turpmāk, ja tas neradīs pārpratumus, mēs pieturēsimies tieši pie šādas izteiksmes formas.

Pieraksta ērtības labad (mēs vēlamies būt pēc iespējas elastīgāki) mainīgos, tāpat kā iepriekšējā paragrāfā izteikumus, turpmāk apzīmēsim ar lielajiem burtiem (parasti no latīņu alfabēta sākuma)

$$A, B, C, \ldots$$

Tāpat mainīgo apzīmēšanai mēs pieļausim izmantot lielos latīņu alfabēta burtus ar indeksiem, piemēram,

$$A_1, B_7, C_i, C_{ij} \ldots$$

5.8. Apgalvojums. *Katrai formulai* $\mathfrak{F}$

$$|\mathfrak{F}|_(- |\mathfrak{F}|_) = 0\,.$$

□ Pierādījums induktīvs pa formulas definīciju.

(i) Ja $\mathfrak{F} = (\Delta^n)$, tad $|\mathfrak{F}|_(- |\mathfrak{F}|_) = 1 - 1 = 0$.

(ii) Ja $\mathfrak{F} = (\neg\mathfrak{A})$, kur $\mathfrak{A}$ ir formula, tad saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0$. No šejienes

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}|_(- |\mathfrak{F}|_) &= |(\neg\mathfrak{A})|_(- |(\neg\mathfrak{A})|_) \\ &= 1 + |\mathfrak{A}|_(- (|\mathfrak{A}|_) + 1) \\ &= |\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0 \end{aligned}$$

(iii) Ja $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, kur $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{B}$ ir formulas, tad saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0 = |\mathfrak{B}|_(- |\mathfrak{B}|_)$. No šejienes

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}|_(- |\mathfrak{F}|_) &= |(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})|_(- |(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})|_) \\ &= 1 + |\mathfrak{A}|_(+ |\mathfrak{B}|_(- (|\mathfrak{A}|_) + \mathfrak{B}_) + 1) \\ &= (|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_)) + (|\mathfrak{B}|_(- |\mathfrak{B}|_)) = 0 \end{aligned}$$

Pārejo gadījumu pierādījumus, proti, ja $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$ vai $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ piedāvājam lasītājam kā vingrinājumu. ■

5.9. Vingrinājums. *Pabeigt 5.8. Apgalvojuma pierādījumu.*

Parastās algebras formulās izdodas ietaupīt daļu no iekavām, norunājot, ka reizināšana saista ciešāk par saskaitīšanu. Līdzīga metode lietojama arī loģikas formulām. Parasti vienojas, ka loģisko operāciju zīmes sakārtotas pēc ciešuma šādā secībā: visciešāk saista negācija ($\neg$), mazāk cieši konjunkcija ($\wedge$) un disjunkcija ($\vee$), vēl mazāk cieši implikācija ($\Rightarrow$) un ekvivalence ($\Leftrightarrow$). Saskaņā ar šo norunu konjunkcija un disjunkcija, arī implikācija un ekvivalence saista vienlīdz cieši. Tā formula

$$(A \Rightarrow ((A \Leftrightarrow C) \wedge C)) \tag{5.1}$$

tagad pierakstāma kā:

$$(A \Rightarrow (A \Leftrightarrow C) \wedge C)$$

Papildus vienosimies parasti nerakstīt arī ārējās iekavas, kurās ieslēgta visa formula. Tagad iepriekš doto formulu var pierakstīt šādi:

$$A \Rightarrow (A \Leftrightarrow C) \wedge C \tag{5.2}$$

5.10. Definīcija. *Formulu $\mathfrak{A}$ sauc par formulas $\mathfrak{F}$ apakšformulu, ja vārds $\mathfrak{A}$ ir vārda $\mathfrak{F}$ dalītājs.*

Saprotams, ka apakšformulas definīcija tiešā veidā neattiecas uz formulas saīsinātu pierakstu. Aplūkojot iepriekšējo piemēru varētu domāt, ka formula

$$A \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$$

ir formulas (5.2) apakšformula, taču atjaunojot visas iekavas redzams, ka vārds

$$(A \Rightarrow (A \Leftrightarrow C))$$

nav vārda (5.1) dalītājs.

5.11. Lemma. *Ja $u \neq \lambda$ ir īsts formulas $\mathfrak{F}$ priedēklis, tad $|u|_(- |u|_) > 0$.*

□ Pierādījums induktīvs pa formulas definīciju.
(i) Ja $\mathfrak{F} = (\Delta^n)$, tad $u = (\Delta^k$, kur $0 \leq k \leq n$. No šejienes

$$|u|_(- |u|_) = 1 > 0.$$

(ii) Ja $\mathfrak{F} = (\neg\mathfrak{A})$, kur $\mathfrak{A}$ ir formula, tad šķirosim divus gadījumus.
a) Pieņemsim, ka $|u| \leq 2$, tad $u =$ (vai $u = (\neg$; tāpēc $|u|_(- |u|_) = 1 > 0$.
b) Pieņemsim, ka $|u| > 2$, tad $u = (\neg v$, kur $\lambda \neq v$ un v ir formulas $\mathfrak{A}$ priedēklis, jo u ir formulas $\mathfrak{F}$ īsts priedēklis.

- Ja v ir formulas $\mathfrak{A}$ īsts priedēklis, tad saskaņā ar ar indukcijas pieņēmumu $|v|_(- |v|_) > 0$; tāpēc

$$|u|_(- |u|_) = |(\neg v|_(- |(\neg v|_) = 1 + |v|_(- |v|_) > 0\,.$$

- Ja $v = \mathfrak{A}$, tad saskaņā ar 5.8. Apgalvojumu $|v|_(- |v|_) = 0$; tāpēc

$$|u|_(- |u|_) = |(\neg v|_(- |(\neg v|_) = 1 + |v|_(- |v|_) > 0\,.$$

(iii) Ja $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, kur $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{B}$ ir formulas, tad tad šķirosim divus gadījumus.
a) Pieņemsim, ka $u = (v$, kur v ir vārda $\mathfrak{A}\vee$ priedēklis.

- Ja $v = \lambda$, tad $u = ($; tāpēc $|u|_(- |u|_) = 1 > 0$.

- Ja v ir formulas $\mathfrak{A}$ īsts priedēklis, tad saskaņā ar ar indukcijas pieņēmumu $|v|_(- |v|_) > 0$; tāpēc
$$|u|_(- |u|_) = |(v|_(- |(v|_) = 1 + |v|_(- |v|_) > 0\,.$$
- Ja $v = \mathfrak{A}$, tad saskaņā ar 5.8. Apgalvojumu $|v|_(- |v|_) = 0$; tāpēc
$$|u|_(- |u|_) = |(v|_(- |(v|_) = 1 + |v|_(- |v|_) > 0\,.$$
- Ja $v = \mathfrak{A}\vee$, tad atkal izmantojam 5.8. Apgalvojumu, proti, $|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0$; tāpēc
$$\begin{aligned} |u|_(- |u|_) &= |(v|_(- |(v|_) = |(\mathfrak{A} \vee |_(- |(\mathfrak{A} \vee |_) \\ &= 1 + |\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) > 0\,. \end{aligned}$$

b) Pieņemsim, ka $u = (\mathfrak{A} \vee v$, tad v ir formulas $\mathfrak{B}$ priedēklis, jo u ir formulas $\mathfrak{F}$ īsts priedēklis.

- Ja v ir formulas $\mathfrak{B}$ īsts priedēklis, tad saskaņā ar ar indukcijas pieņēmumu $|v|_(- |v|_) > 0$. Tagad ņemam vērā arī 5.8. Apgalvojumu $|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0$; tāpēc
$$\begin{aligned} |u|_(- |u|_) &= |(\mathfrak{A} \vee v|_(- |(\mathfrak{A} \vee v|_) \\ &= 1 + |\mathfrak{A}|_(+ |v|_(- |\mathfrak{A}|_) - |v|_) \\ &= 1 + |v|_(- |v|_) > 0\,. \end{aligned}$$
- Ja $v = \mathfrak{B}$, tad izmantojam 5.8. Apgalvojumu, proti, $|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0$ un $|\mathfrak{B}|_(- |\mathfrak{B}|_) = 0$; tāpēc
$$\begin{aligned} |u|_(- |u|_) &= |(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}|_(- |(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}|_) \\ &= 1 + |\mathfrak{A}|_(+ |\mathfrak{B}|_(- |\mathfrak{A}|_) - |\mathfrak{B}|_) > 0\,. \end{aligned}$$

Pārejo gadījumu pierādījumus, proti, ja $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$ vai $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ piedāvājam lasītājam kā vingrinājumu. ■

5.12. Vingrinājums. *Pabeigt 5.11. Lemmas pierādījumu.*

5.13. Sekas. *Ja $v \neq \lambda$ ir īsts formulas $\mathfrak{F}$ priedēklis, tad* $|v|_(- |v|_) < 0$.

□ Pieņemsim, ka $v \neq \lambda$ ir formulas $\mathfrak{F}$ īsts piedēklis, tad $\mathfrak{F} = uv$, kur $u \neq \lambda$ un u ir formulas $\mathfrak{F}$ īsts priedēklis. Saskaņā ar 5.11. Lemmu $|u|_(- |u|_) > 0$. Tā kā $|\mathfrak{F}|_(- |\mathfrak{F}|_) = 0$ (5.8. Apgalvojums) un

$$|\mathfrak{F}|_(= |u|_(+ |v|_(, \quad |\mathfrak{F}|_) = |u|_) + |v|_)\,,$$

tad

$$\begin{aligned} |v|_(- |v|_) &= |\mathfrak{F}|_(- |u|_(- (|\mathfrak{F}|_) - |u|_)) \\ &= -(|u|_(- |u|_)) < 0\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pieņemsim, ka

$$u_1w_1v_1 = u_2w_2v_2\,.$$

Mēs teiksim, ka w_1 *iederās* w_2, ja atrodami tādi vārdi u', v', ka

$$u_1 = u_2u' \quad \text{un} \quad v_1 = v'v_2\,.$$

Pretējā gadījumā mēs teiksim, ka w_1 *neiederās* w_2.

Ja w_1 iederās w_2, tad w_1 ir vārda w_2 dalītājs, taču ne katrs vārda w_2 dalītājs iederās vārdā w_2.

5.14. Piemērs. Apskatam šādus vārdus:

$$\begin{aligned} u_1 &= a, \quad w_1 = b, \quad v_1 = aba, \\ u_2 &= aba. \quad w_2 = b, \quad v_2 = a. \end{aligned}$$

Šai piemērā

$$u_1w_1v_1 = ababa = u_2w_2v_2\,,$$

taču w_1 neiederās vārdā w_2, kaut arī $w_1 = w_2$.

Tātad, lai runātu par iederēšanos mums jānofiksē konkrētas vārdu w_1 un w_2 ieejas

$$(u_1, w_1, v_1) \quad \text{un} \quad (u_2, w_2, v_2)\,.$$

5.15. Teorēma. *Ja formulā $\mathfrak{F} = u\mathfrak{A}v$ apakšformulu $\mathfrak{A}$ aizstāj ar formulu $\mathfrak{B}$, tad jauniegūtais vārds $u\mathfrak{B}v$ ir formula.*

□ Pierādījums induktīvs pa formulas definīciju.

(i) Ja $\mathfrak{F} = (\Delta^n)$ un $\mathfrak{F} = u\mathfrak{A}v$, kur $\mathfrak{A}$ ir formulas $\mathfrak{F}$ apakšformula, tad $u = v = \lambda$, jo formulas (Δ^n) vienīgā apakšformula $\mathfrak{A}$ ir pati formula (Δ^n). Tā rezultātā $u\mathfrak{B}v = \mathfrak{B}$, kas ir formula pēc dotā.

(ii) Ja $u\mathfrak{A}v = \mathfrak{F} = (\neg\mathfrak{C})$, kur $\mathfrak{C}$ ir formula, tad šķirosim divus gadījumus.

a) $\mathfrak{A}$ iederās formulā $\mathfrak{C}$ tā, ka $\mathfrak{C} = u'\mathfrak{A}v'$, tad $u = (\neg u'$ un $v = v')$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $\mathfrak{C}' \leftrightharpoons u'\mathfrak{B}v'$ ir formula. No šejienes

$$u\mathfrak{B}v \ = \ (\neg u'\mathfrak{B}v') = (\neg\mathfrak{C}')\,,$$

kas, ņemot vērā formulas definīciju, pati ir formula.

b) Pretējā gadījumā ($\mathfrak{A}$ neiederās formulā $\mathfrak{C}$) analizējamas šādas situācijas.

- Ja $u = \lambda$, tad $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}v$. Pieņemsim, ka $v \neq \lambda$, tad $\mathfrak{A}$ ir vārda $\mathfrak{F}$ īsts netukšs priedēklis, tāpēc (5.11. Lemma)

  $$|\mathfrak{A}|_{(} - |\mathfrak{A}|_{)} > 0\,;$$

  taču $\mathfrak{A}$ ir formula, tādēļ (5.8. Apgalvojums)

  $$|\mathfrak{A}|_{(} - |\mathfrak{A}|_{)} = 0\,.$$

  Pretruna! Tas nozīmē, ka $v = \lambda$. Līdz ar to $u\mathfrak{B}v = \mathfrak{B}$, kas ir formula pēc dotā.

- Ja $u \neq \lambda$, tad $|u| \geq 2$, jo katras formulas pirmais burts ir kreisā iekava (. Līdz ar to $\mathfrak{A}$ ir vārda $\mathfrak{C})$ dalītājs. Mēs pieņēmām, ka šis nav gadījums *a*) ($\mathfrak{A}$ neiederās formulā $\mathfrak{C}$), tāpēc $\mathfrak{A}$ ir vārda $\mathfrak{C})$ piedēklis. Līdz ar to $\mathfrak{A}$ ir arī formulas $\mathfrak{F}$ īsts netukšs piedēklis, tādēļ (5.13. Sekas)

  $$|\mathfrak{A}|_{(} - |\mathfrak{A}|_{)} < 0\,;$$

  taču $\mathfrak{A}$ ir formula, tāpēc (5.8. Apgalvojums)

  $$|\mathfrak{A}|_{(} - |\mathfrak{A}|_{)} = 0\,.$$

  Pretruna! Tas nozīmē, ka šī situācija vispār nav iespējama.

(iii) Ja $u\mathfrak{A}v = \mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2)$, kur $\mathfrak{F}_1$ un $\mathfrak{F}_2$ ir formulas, tad izdalīsim šādus gadījumus.

a) $\mathfrak{A}$ iederās formulā $\mathfrak{F}_1$ tā, ka $\mathfrak{F}_1 = u'\mathfrak{A}v'$, tad $u = (u'$ un $v = v' \vee \mathfrak{F}_2)$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $\mathfrak{C} \leftharpoondown u'\mathfrak{B}v'$ ir formula. No šejienes

$$u\mathfrak{B}v \;=\; (u'\mathfrak{B}v' \vee \mathfrak{F}_2) = (\mathfrak{C} \vee \mathfrak{F}_2)\,,$$

kas, ņemot vērā formulas definīciju, pati ir formula.

b) $\mathfrak{A}$ iederās formulā $\mathfrak{F}_2$ tā, ka $\mathfrak{F}_2 = u'\mathfrak{A}v'$, tad $u = (\mathfrak{F}_1 \vee u'$ un $v = v')$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $\mathfrak{C} \leftharpoondown u'\mathfrak{B}v'$ ir formula. No šejienes

$$u\mathfrak{B}v \;=\; (\mathfrak{F}_1 \vee u'\mathfrak{B}v') = (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{C})\,,$$

kas, ņemot vērā formulas definīciju, pati ir formula.

c) Pretējā gadījumā ($\mathfrak{A}$ neiederās nedz formulā $\mathfrak{F}_1$, nedz $\mathfrak{F}_2$) analizējamas šādas situācijas.

- Ja $u = \lambda$, tad $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}v$. Pieņemsim, ka $v \neq \lambda$, tad $\mathfrak{A}$ ir vārda $\mathfrak{F}$ īsts netukšs priedēklis, tāpēc (5.11. Lemma)

  $$|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) > 0\,;$$

  taču $\mathfrak{A}$ ir formula, tādēļ (5.8. Apgalvojums)

  $$|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0\,.$$

  Pretruna! Tas nozīmē, ka $v = \lambda$. Līdz ar to $u\mathfrak{B}v = \mathfrak{B}$, kas ir formula pēc dotā.

- Ja $0 < |u| \leq |\mathfrak{F}_1|$, tad eksistē tāds vārda $\mathfrak{A}$ īsts netušs priedēklis w, kas ir vārda $\mathfrak{F}_1$ piedēklis (pretējā gadījumā $\mathfrak{A}$ iederās $\mathfrak{F}_1$). Saskaņā ar 5.11. Lemmu

  $$|w|_(- |w|_) > 0\,;$$

  taču w ir arī formulas $\mathfrak{F}_1$ piedēklis, tāpēc (5.8. Apgalvojums un 5.13. Sekas)

  $$|w|_(- |w|_) \leq 0\,.$$

  Pretruna! Tas nozīmē, ka šī situācija vispār nav iespējama.

- Ja $|\mathfrak{F}_1| < |u|$, tad $|u| \neq |(\mathfrak{F}_1|$, jo $\mathfrak{A}$ kā formula sākas ar kreiso iekavu (, nevis burtu $\vee$. Mēs pieņēmām, ka $\mathfrak{A}$ neiederās $\mathfrak{F}_2$, tāpēc $\mathfrak{A}$ ir vārda $\mathfrak{F}_2)$ piedēklis. Līdz ar to $\mathfrak{A}$ ir arī formulas $\mathfrak{F}$ īsts netukšs piedēklis, tādēļ (5.13. Sekas)

  $$|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) < 0\,;$$

tačū $\mathfrak{A}$ ir formula, tāpēc (5.8. Apgalvojums)

$$|\mathfrak{A}|_(- |\mathfrak{A}|_) = 0\,.$$

Pretruna! Tas nozīmē, ka šī situācija arī nav iespējama.

Pārejo gadījumu pierādījumus, proti, ja $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$ vai $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ piedāvājam lasītājam kā vingrinājumu. ■

5.16. Vingrinājums. *Pabeigt 5.15. Teorēmas pierādījumu.*

5.17. Sekas. (i) *Ja* $\mathfrak{F} = (\Delta^n)$ *un* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}$ *apakšformula, tad* $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$.

(ii) *Ja* $\mathfrak{F} = (\neg\mathfrak{C})$ *un* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}$ *apakšformula, tad* $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$ *vai* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{C}$ *apašformula.*

(iii) *Ja* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2)$ *un* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}$ *apakšformula, tad* $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_1$ *apašformula vai* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_2$ *apašformula.*

□ Skatīt 5.15. Teorēmas atbilstošos pierādījuma etapus. ■

5.18. Vingrinājums. (i) *Ja* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2)$ *un* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}$ *apakšformula, tad* $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_1$ *apašformula vai* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_2$ *apašformula.*

(ii) *Ja* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \Rightarrow \mathfrak{F}_2)$ *un* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}$ *apakšformula, tad* $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_1$ *apašformula vai* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_2$ *apašformula.*

(iii) *Ja* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \Leftrightarrow \mathfrak{F}_2)$ *un* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}$ *apakšformula, tad* $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_1$ *apašformula vai* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}_2$ *apašformula.*

Tikko mēs sākam interesēties par formulas patiesuma vērtībām, viss iepriekšējā paragrāfa saturs kļūst nozīmīgs. Izteikumu loģikas formulu kā tādu vispārīgā gadījumā nevar uzskatīt par izteikumu, jo apgalvojums, kuru izsaka formula, satur mainīgos, un formulas patiesuma vērtību nevar noteikt, nezinot mainīgo patiesuma vērtības. Ja turpretim formulas argumentiem piešķirtas noteiktas patiesuma vērtības, tad vienmēr iespējams viennozīmīgi noskaidrot tā izteikuma patiesuma vērtību, kuru iegūst no formulas. Šo vērtību mēdz saukt par dotās *formulas vērtību* pie attiecīgajām argumentu patiesuma vērtībām.

Tagad šo pašu paskaidrosim nedaudz formālāk, taču mums nepieciešamas vēl dažas precizējošas definīcijas.

5.19. Definīcija. *Funkciju* $h : X^n \to X$ *sauc par funkciju*

$$\begin{array}{rcl} f & : & X^m \to X, \\ g_1 & : & X^n \to X, \\ g_2 & : & X^n \to X, \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_m & : & X^n \to X \end{array}$$

kompozīciju, ja

$$h(\bar{x}) \leftharpoondown f(g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \ldots, g_m(\bar{x})).$$

Īsāka pieraksta labad šai situācijā lietosim apzīmējumu $h = f(g_1, g_2, \ldots, g_m)$.

5.20. Definīcija. *Kopu* $\mathfrak{K}(S)$ *sauc par kopas*

$$S \subseteq \{f : X^n \to X \mid n \in \mathbb{N}\}$$

klonu, ja

(i) $\mathfrak{K}(S)$ *satur attēlojumus*

$$\omega_m^n : X^n \to X : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_m$$

visiem $n \in \mathbb{Z}_+$ *un* $m \in \overline{1, n}$;

(ii) *ja* $f, g_1, g_2 \ldots, g_m \in \mathfrak{K}(S)$ *un* $h = f(g_1, g_2 \ldots, g_m)$, *tad* $h \in \mathfrak{K}(S)$.

Atzīmēsim, ka saskaņā ar vispārināto indukcijas principu klons $\mathfrak{K}(S)$ ir definēts korekti.

Pieņemsim, ka

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

ir formulas $\mathfrak{F}$ visu dažādo argumentu saraksts. Turpmāk šādā gadījumā formulas $\mathfrak{F}$ apzīmēšanai lietosim pierakstu $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Formulu $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ var uzskatīt arī par n-argumentu loģisko funkciju, kas pieder tradicionālo loģisko funkciju: negācijas, konjunkcijas, disjunkcijas, implikācijas un ekvivalences klonam.

Tas arī pamato apgalvojumu:

— Ja formulas argumentiem piešķirtas noteiktas patiesuma vērtības, tad vienmēr iespējams viennozīmīgi noskaidrot tā izteikuma patiesuma vērtību, kuru iegūst no formulas.

Citiem vārdiem sakot, ja

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \{a, p\}^n,$$

tad loģiskās funkcijas $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ vērtību

$$\mathfrak{F}(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \{a, p\}$$

sauc par formulas $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ vērtību pie argumentu $A_1, A_2, \dots, A_n$ vērtībām $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Aplūkosim, piemēram, formulu

$$\neg(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$$

apzīmējot to saīsināti ar $\mathfrak{F}(A, B)$. Pieņemsim, ka abi mainīgie ir aplami, t.i., ar patiesuma vērtību a. Šai situācijā (līdzīgi kā izteikumu gadījumā) lietosim pierakstu $A \sim B \sim a$. Tagad varam aprēķināt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(a, a) &\sim \neg(a \vee a) \wedge (a \Rightarrow \neg a) \\ &\sim \neg a \wedge (a \Rightarrow p) \\ &\sim p \wedge p \ \sim\ p \end{aligned}$$

Līdzīgā veidā var aprēķināt $\mathfrak{F}(A, B)$ patiesuma vērtību atlikušajos trijos gadījumos, t.i., atrast

$$\mathfrak{F}(a, p), \quad \mathfrak{F}(p, a) \quad \text{un} \quad \mathfrak{F}(p, p).$$

Rezultātus ērti pierakstīt tabulas veidā.

A	B	$\mathfrak{F}(A, B)$
a	a	p
a	p	a
p	a	a
p	p	a

Tabulu, kuras rindiņas atbilst visām iespējamām formulas argumentu patiesuma vērtību kombinācijām un kas uzrāda atbilstošo formulas patiesuma vērtību, sauc par *formulas patiesuma vērtību tabulu* jeb *formulas tabulu.* Rindiņas tabulā parasti izkārto *leksikogrāfiski.* Tas nozīmē, ka tos formālos vārdus alfabētā $\{a, p\}$, kuri sastāda argumentu vērtību kombinācijas, sakārto tādā secībā, kādā tie būtu uzrādīti vārdnīcā, ievērojot, ka burts a alfabētā atrodas pirms burta p:

$$\begin{array}{cccccc}
a & a & \ldots & a & a & a \\
a & a & \ldots & a & a & p \\
a & a & \ldots & a & p & a \\
a & a & \ldots & a & p & p \\
a & a & \ldots & p & a & a \\
a & a & \ldots & p & a & p \\
. & . & . & . & . & . \\
p & p & \ldots & p & p & p
\end{array}$$

5.21. Apgalvojums. *Ja formula satur n dažādus mainīgos, tad tās patiesuma vērtību tabulā ir 2^n rindiņas.*

□ Mums jāpierāda, ka kopa $\{a, p\}^n$ satur 2^n elementus jeb citiem vārdiem sakot, ka alfabēta $\{a, p\}$ dažādo vārdu skaits, kuru garums ir vienāds ar n, ir 2^n.

Pierādījumā izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze: ja $n = 1$, tad iegūstam divus vārdus: a un p.

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka apgalvojums pareizs. Tātad mūsu rīcībā ir 2^n dažādi vārdi garumā n:

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2^n}$$

Izmantojot konkatenācijas operāciju iegūstam 2^{n+1} dažādus vārdus garumā $n + 1$:

$$\begin{array}{l} u_1a, u_2a, \ldots, u_{2^n}a \\ u_1p, u_2p, \ldots, u_{2^n}p \quad \blacksquare \end{array}$$

Pēdējo tabulas aili sauc par formulas *vērtību aili*, parasti to pieraksta kā rindiņu $'(v_1v_2 \ldots v_{2^n})$. Praktiskos aprēķinos tabula saprotams drīkst saturēt arī papildus ailes, kurās reprezentēti starprezultāti.

5.22. Piemērs. *Formulas* $\mathfrak{F}(A, B, C) \leftharpoondown (A \Rightarrow B \wedge C) \Leftrightarrow \neg(A \vee C)$ *tabula:*

A	B	C	$A \Rightarrow B \wedge C$	$B \wedge C$	$\neg(A \vee C)$	$A \vee C$	$\mathfrak{F}(A, B, C)$
a	a	a	p	a	p	a	p
a	a	p	p	a	a	p	a
a	p	a	p	a	p	a	p
a	p	p	p	p	a	p	a
p	a	a	a	a	a	p	p
p	a	p	a	a	a	p	p
p	p	a	a	a	a	p	p
p	p	p	p	p	a	p	a

Šis formulas vērtību aile ir $'(papapppa)$.

Atzīmēsim tehnisku paņēmienu, kas dažkārt atvieglo formulas tabulas sastādīšanu. Starprezultātus var izvietot zem attiecīgajiem loģisko operāciju simboliem formulas pierakstā. Tāds izkārtojums ļauj paredzēt īpašas ailes arī mainīgajiem. Formulai $\mathfrak{F}(A, B, C)$ tagad aprēķinu gaita izskatās šādi:

A	B	C	$(A$	$\Rightarrow$	B	$\wedge$	$C)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(A$	$\vee$	$C)$
a	a	a	a	p	a	a	a	p	p	a	a	a
a	a	p	a	p	a	a	p	a	a	a	p	p
a	p	a	a	p	p	a	a	p	p	a	a	a
a	p	p	a	p	p	p	p	a	a	a	p	p
p	a	a	p	a	a	a	a	p	a	p	p	a
p	a	p	p	a	a	a	p	p	a	p	p	p
p	p	a	p	a	p	a	a	p	a	p	p	a
p	p	p	p	p	p	p	p	a	a	p	p	p
			1.	7.	2.	6.	3.	10.	9.	4.	8.	5.

Aprēķinu secību norāda skaitļi zem ailēm.

5.23. Vingrinājumi. *Sastādīt formulu tabulas!*

(i) $\neg A \wedge A$

(ii) $A \Rightarrow \neg(B \Leftrightarrow \neg A)$

(iii) $(A \wedge (B \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \Rightarrow A) \vee B)$

(iv) $(C \vee (B \wedge A)) \vee (\neg(B \Leftrightarrow \neg C) \Rightarrow A)$

(v) $A \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg D \Rightarrow B))$

6. nodaļa

FORMULU EKVIVALENCE

Identiski patiesas (tautoloģijas), identiski aplamas, neitrālas, izpildāmas un atspēkojamas formulas. Formulu ekvivalence. Loģisko operāciju savstarpējā atkarība.

Teiksim, ka formula $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *pieņem vērtību* $v \in \{a, p\}$, ja var atrast tādas patiesuma vērtības

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \{a, p\}^n,$$

ka

$$\mathfrak{F}(p_1, p_2, \ldots, p_n) \sim v\,.$$

6.1. Definīcija. (i) *Formulu $\mathfrak{F}$ sauc par identiski patiesu formulu jeb tautoloģiju, ja tā pieņem tikai vērtību p.*

(ii) *Formulu $\mathfrak{F}$ sauc par identiski aplamu formulu jeb kontradikciju, ja tā pieņem tikai vērtību a.*

(iii) *Formulu $\mathfrak{F}$ sauc par neitrālu formulu, ja tā pieņem gan vērtību a, gan vērtību p.*

(iv) *Formulu $\mathfrak{F}$ sauc par izpildāmu formulu, ja tā pieņem vērtību p.*

(v) *Formulu $\mathfrak{F}$ sauc par atspēkojamu formulu, ja tā pieņem vērtību a.*

6.2. Piemēri. (i) Formula

$$\mathfrak{F}_1 \leftharpoondown (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

ir tautoloģija. Par to var pārliecināties iepazīstoties ar šīs formulas tabulu:

A	B	C	$(A$	$\Rightarrow$	$C)$	$\wedge$	$(B$	$\Rightarrow$	$C)$	$\Rightarrow$	$(A$	$\vee$	B	$\Rightarrow$	$C)$
a	a	a	a	p	a	p	a	p	a	p	a	a	a	p	a
a	a	p	a	p	p	p	a	p	p	p	a	a	a	p	p
a	p	a	a	p	a	a	p	a	a	p	a	p	p	a	a
a	p	p	a	p	p	p	p	p	p	p	a	p	p	p	p
p	a	a	p	a	a	a	a	p	a	p	p	p	a	a	a
p	a	p	p	p	p	p	a	p	p	p	p	p	a	p	p
p	p	a	p	a	a	a	p	a	a	p	p	p	p	a	a
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
			1.	8.	2.	10.	3.	9.	4.	13.	5.	11.	6.	12.	7.

(ii) Formula

$$\mathfrak{F}_2 \rightleftharpoons (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow \neg B)$$

ir identiski aplama. Tās tabula izskatās šādi:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow \neg B$	$\neg B$	$\mathfrak{F}_2$
a	a	p	a	p	a
a	p	a	p	a	a
p	a	a	p	p	a
p	p	p	a	a	a

(iii) Pats vienkāršākais neitrālas formulas piemērs ir formula, kas satur tikai vienu argumentu: A. Pati īsākā (te mēs ņemam vērā formulā ieejošo burtu skaitu) neitrālā formula ir (Δ).

(iv) Formula $A \Rightarrow B$ ir izpildāma, jo $a \Rightarrow p \sim p$. Formula $\mathfrak{F}_1$ ir ne tikai tautoloģija, tā ir arī izpildāma.

(v) Formula $A \Rightarrow B$ ir arī atspēkojama, jo $p \Rightarrow a \sim a$. Savukārt formula $\mathfrak{F}_2$ ir ne tikai identiski aplama, bet tā ir arī atspēkojama.

Uzreiz no 6.1. Definīcijas izriet

6.3. Apgalvojums. (i) *Katra tautoloģija ir izpildāma.*

(ii) *Ja $\mathfrak{F}$ ir identiski aplama formula, tad tā ir atspēkojama.*

(iii) *Formula $\mathfrak{F}$ ir identiski patiesa tad un tikai tad, ja $\neg\mathfrak{F}$ ir identiski aplama.*

(iv) *Katra neitrāla formula ir gan izpildāma, gan atspēkojama.*

No tīri loģiskā viedokļa pašas interesantākās ir tautoloģijas. Taču, ja mēs interesējamies par dažādiem tehniskiem lietojumiem (piemēram, elektronikā), tad daudz interesantākas ir neitrālās formulas.

- **Tēze par tautoloģijām.**
  Katra tautoloģija izsaka kaut kādu vispārīgu domāšanas likumu.

Tēzi pamato tas, ka loģiskās operācijas ir pietiekami labi sakaņotas ar mūsu parasto domāšanu. Tai pašā laikā jāpasvītro, ka tēze netiks pierādīta. Tas nav iespējams vismaz divu iemeslu dēļ. Pirmkārt, mūsu domāšana, līdz ar to arī tāds jēdziens kā *vispārīgs domāšanas likums*, nav tik nemainīgs un precīzi definējams objekts, lai to varētu iekļaut stingros matemātiskos pierādījumos. Otrkārt, ir tādi loģikas paveidi, kuros daļa no pašreiz aplūkojamām tautoloģijām nav vispārīgi likumi.

6.4. Vingrinājumi. *Pierādīt, ka dotās formulas ir tautoloģijas!*

(i)	$A \vee \neg A$
(ii)	$A \Rightarrow A$
(iii)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
(iv)	$A \wedge B \Rightarrow A$
(v)	$A \wedge B \Rightarrow B$
(vi)	$A \Rightarrow A \vee B$
(vii)	$A \Rightarrow B \vee A$
(viii)	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$
(ix)	$A \Leftrightarrow A$
(x)	$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$
(xi)	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$

6.5. Definīcija. *Formulas* $\mathfrak{A}$ *un* $\mathfrak{B}$ *sauc par ekvivalentām, ja formula* $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ *ir tautoloģija.*

6.6. Piemērs. Formulas

$$A \Leftrightarrow B$$

un

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ir ekvivalentas, jo formula

$$\mathfrak{F}_3 \leftharpoondown (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ir tautoloģija. Par to var pārliecināties sastādot šīs formulas tabulu.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$\mathfrak{F}_3$
a	a	p	p	p	p	p
a	p	a	p	a	a	p
p	a	a	a	p	a	p
p	p	p	p	p	p	p

6.7. Apgalvojums. *Pieņemsim, ka*

$$\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n) \leftharpoondown \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}.$$

Formulas $\mathfrak{A}$ *un* $\mathfrak{B}$ *ir ekvivalentas tad un tikai tad, ja katram patiesumvērtību kortežam*

$$\begin{array}{rcl} (p_1, p_2, \ldots, p_n) & \in & \{a, p\}^n \\ \mathfrak{A}(p_1, p_2, \ldots, p_n) & \sim & \mathfrak{B}(p_1, p_2, \ldots, p_n). \end{array}$$

$\square$ Apgalvojums uzreiz izriet operācijas $\Leftrightarrow$ definīcijas un definīcijas, kādas formulas sauc par ekvivalentām. $\blacksquare$

Noruna. Simbolu $\simeq$ lietosim gadījumā, ja divas formulas ir ekvivalentas. Kā piemēru var aplūkot iepriekšējā piemēra tabulu. Te redzams, ka formulām $A \Leftrightarrow B$ un $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ vērtību ailes tiešām sakrīt, tāpēc saskaņā ar mūsu norunu šis fakts pierakstāms šādi:

$$A \Leftrightarrow B \simeq (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

6.8. Sekas. *Formulas* $\mathfrak{A}$ *un* $\mathfrak{B}$ *ir ekvivalentas tad un tikai tad, ja ekvivalentas ir formulas* $\neg\mathfrak{A}$ *un* $\neg\mathfrak{B}$.

6.9. Vingrinājumi. *Ja* $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$, *tad*

$$\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} & \simeq & \mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}, \\ \text{(ii)} & \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} & \simeq & \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}, \\ \text{(iii)} & \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B} & \simeq & \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{C}, \\ \text{(iv)} & \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} & \simeq & \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A}, \\ \text{(v)} & \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B} & \simeq & \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{C}. \end{array}$$

6.10. Apgalvojums (refleksivitāte). *Katra formula ekvivalenta pati sev.*

6.11. Apgalvojums (simetriskums). *Ja formula $\mathfrak{A}$ ir ekvivalenta formulai $\mathfrak{B}$, tad formula $\mathfrak{B}$ ir ekvivalenta formulai $\mathfrak{A}$.*

6.12. Apgalvojums (transitivitāte). *Ja formula $\mathfrak{A}$ ir ekvivalenta formulai $\mathfrak{B}$ un formula $\mathfrak{B}$ ir ekvivalenta formulai $\mathfrak{C}$, tad formula $\mathfrak{A}$ ir ekvivalenta formulai $\mathfrak{C}$.*

6.13. Vingrinājumi. Pierādīt, ka konjunkcija un disjunkcija ir *idempotentas* operācijas, t.i.,

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & A \wedge A \simeq A \\ \text{(ii)} & A \vee A \simeq A \end{array}$$

Pierādīt, ka konjunkcija un disjunkcija ir *komutatīvas* operācijas, t.i.,

$$\begin{array}{ll} \text{(iii)} & A \wedge B \simeq B \wedge A \\ \text{(iv)} & A \vee B \simeq B \vee A \end{array}$$

Pierādīt, ka konjunkcija un disjunkcija ir *asociatīvas* operācijas, t.i.,

$$\begin{array}{ll} \text{(v)} & (A \wedge B) \wedge C \simeq A \wedge (B \wedge C) \\ \text{(vi)} & (A \vee B) \vee C \simeq A \vee (B \vee C) \end{array}$$

Šī iemesla dēļ gan konjunkcijas, gan disjunkcijas pierakstā arī vairāku locekļu gadījumā iekavas nelieto. Vēl vairāk

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1}^{n} A_i &\leftharpoondown A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \\ \bigvee_{i=1}^{n} A_i &\leftharpoondown A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \end{aligned}$$

Pierādīt, ka negācija ir *involutīva* operācija, t.i.,

$$\begin{array}{ll} \text{(vii)} & \neg\neg A \simeq A \end{array}$$

Pierādīt, ka konjunkciju un disjunkciju saista divi *distributīvie* likumi, t.i.,

$$\begin{array}{ll} \text{(viii)} & A \vee (B \wedge C) \simeq (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ \text{(ix)} & A \wedge (B \vee C) \simeq (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{array}$$

Pierādīt, ka konjunkciju un disjunkciju saista *absorbcijas* likumi, t.i.,

$$\text{(x)} \qquad A \vee (A \wedge B) \simeq A$$
$$\text{(xi)} \qquad A \wedge (A \vee B) \simeq A$$

Pierādīt, ka konjunkciju un disjunkciju ar negāciju saista *de Morgana* likumi, t.i.,

$$\text{(xii)} \qquad \neg(A \wedge B) \simeq \neg A \vee \neg B$$
$$\text{(xiii)} \qquad \neg(A \vee B) \simeq \neg A \wedge \neg B$$

Pierādīt, ka implikāciju un negāciju saista *kontrapozīcijas* likums, t.i.,

$$\text{(xiv)} \qquad A \Rightarrow B \simeq \neg B \Rightarrow \neg A$$

6.14. Teorēma. *Pieņemsim, ka* $\mathfrak{F} = u\mathfrak{A}v$ *un* $\mathfrak{A}$ *ir formulas* $\mathfrak{F}$ *apakšformula. Ja formula* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$*, tad* $\mathfrak{F} \simeq u\mathfrak{B}v$*.*

□ Pierādījums induktīvs pa formulas definīciju.

(i) Ja $\mathfrak{F} = (\Delta^n)$ un $\mathfrak{A}$ ir formulas $\mathfrak{F}$ apakšformula, tad (5.17. Sekas) $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$. Tā rezultātā $u = \lambda = v$, tāpēc $u\mathfrak{B}v = \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A} = \mathfrak{F}$.

(ii) Ja $u\mathfrak{A}v = \mathfrak{F} = (\neg\mathfrak{C})$, kur $\mathfrak{C}$ ir formula, tad šķirojami divi gadījumi (5.17. Sekas).

a) $\mathfrak{A}$ iederās formulā $\mathfrak{C}$ tā, ka $\mathfrak{C} = u'\mathfrak{A}v'$, tad $u = (\neg u'$ un $v = v')$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $\mathfrak{C} \simeq u'\mathfrak{B}v'$. No šejienes (6.8. Sekas)

$$\mathfrak{F} = (\neg\mathfrak{C}) \quad\simeq\quad (\neg u'\mathfrak{B}v') = u\mathfrak{B}v\,.$$

b) Pretējā gadījumā ($\mathfrak{A}$ neiederās formulā $\mathfrak{C}$) $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$. Tā rezultātā $u = \lambda = v$, tāpēc $u\mathfrak{B}v = \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A} = \mathfrak{F}$.

(iii) Ja $u\mathfrak{A}v = \mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2)$, kur $\mathfrak{F}_1$ un $\mathfrak{F}_2$ ir formulas, tad iespējami trīs gadījumi (5.17. Sekas).

a) $\mathfrak{A}$ iederās formulā $\mathfrak{F}_1$ tā, ka $\mathfrak{F}_1 = u'\mathfrak{A}v'$, tad $u = (u'$ un $v = v' \vee \mathfrak{F}_2)$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $\mathfrak{F}_1 \simeq u'\mathfrak{B}v'$. No šejienes

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2) \quad\simeq\quad (u'\mathfrak{B}v' \vee \mathfrak{F}_2) = u\mathfrak{B}v\,.$$

b) $\mathfrak{A}$ iederās formulā $\mathfrak{F}_2$ tā, ka $\mathfrak{F}_2 = u'\mathfrak{A}v'$, tad $u = (\mathfrak{F}_1 \vee u'$ un $v = v')$. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $\mathfrak{F}_2 \simeq u'\mathfrak{B}v'$. No šejienes

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2) \simeq (\mathfrak{F}_1 \vee u'\mathfrak{B}v') = u\mathfrak{B}v\,.$$

c) Pretējā gadījumā ($\mathfrak{A}$ neiederās nedz formulā $\mathfrak{F}_1$, nedz $\mathfrak{F}_2$) $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$. Tā rezultātā $u = \lambda = v$, tāpēc $u\mathfrak{B}v = \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A} = \mathfrak{F}$.

Pārejo gadījumu pierādījumus, proti, ja $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$ vai $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ piedāvājam lasītājam kā vingrinājumu. ■

6.15. Vingrinājums. *Pabeigt 6.14. Teorēmas pierādījumu.*

6.16. Apgalvojums.

$$A \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} B_i) \simeq \bigwedge_{i=1}^{n} (A \vee B_i) \tag{6.1}$$

□ Pierādījumā izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze: ja $n = 1$, tad iegūstam: $A \vee B_1 \simeq A \vee B_1$.

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka apgalvojums pareizs. Tātad mūsu rīcībā ir formula (6.1).

$$\begin{aligned}
A \vee (\bigwedge_{i=1}^{n+1} B_i) &\simeq A \vee ((\bigwedge_{i=1}^{n} B_i) \wedge B_{n+1}) \\
&\simeq (A \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} B_i)) \wedge (A \vee B_{n+1}) \\
&\simeq (\bigwedge_{i=1}^{n} (A \vee B_i)) \wedge (A \vee B_{n+1}) \\
&\simeq \bigwedge_{i=1}^{n+1} (A \vee B_i)
\end{aligned}$$

Pirmā ekvivalence ir sekas no 6.13. Vingrinājuma (v) un 6.9. Vingrinājuma (i). Otrā ekvivalence ir sekas no 6.13. Vingrinājuma (viii). Trešā ekvivalence ir sekas no indukcijas pieņēmuma un 6.9. Vingrinājuma (ii). Visbeidzot pēdējā ekvivalence ir sekas no 6.13. Vingrinājuma (v). ■

6.17. Vingrinājumi.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(i)} & A \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} B_i) & \simeq & \bigvee_{i=1}^{n} (A \wedge B_i) \\
\text{(ii)} & A \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} B_i & \simeq & \bigwedge_{i=1}^{n} (A \Rightarrow B_i) \\
\text{(iii)} & \bigvee_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow A & \simeq & \bigwedge_{i=1}^{n} (B_i \Rightarrow A)
\end{array}
$$

De Morgana likumu vispārinājumi:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(iv)} & \neg \bigvee_{i=1}^{n} A_i & \simeq & \bigwedge_{i=1}^{n} \neg A_i \\
\text{(v)} & \neg \bigwedge_{i=1}^{n} A_i & \simeq & \bigvee_{i=1}^{n} \neg A_i
\end{array}
$$

Tā kā formula $A \Rightarrow B$ ir ekvivalenta formulai $\neg A \vee B$ un formula $\neg A \vee B$ satur tikai loģiskās operācijas $\neg$ un $\vee$, tad mēs sakām, ka loģiskā operācija $\Rightarrow$ izsakāma ar loģiskajām operācijām $\neg$ un $\vee$. Tātad

$$A \Rightarrow B \simeq \neg A \vee B.$$

Atceroties funkcionālo pieeju varam teikt, ka implikācija pieder kopas $\{\neg, \vee\}$ klonam. Tagad mēs varam pasniegt arī definīciju.

6.18. Definīcija. *Saka, ka loģiskā operācija β izsakāma ar loģiskajām operācijām $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, ja operacija β pieder kopas $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ klonam.*

6.19. Apgalvojums. *Loģiskā operācija $\Leftrightarrow$ izsakāma ar $\neg, \wedge$ un $\vee$.*

$$
\begin{array}{llcll}
\square & A \Leftrightarrow B & \simeq & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) & \text{skatīt } \mathfrak{F}_3 \\
 & & \simeq & (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) & \blacksquare
\end{array}
$$

Visas divvietīgās loģiskās operācijas apkopas šajā tabulā.

A	B	$\wr^\star_0$	$\wr^\star_1$	$\wr^\star_2$	$\wr^\star_3$	$\wr^\star_4$	$\wr^\star_5$	$\wr^\star_6$	$\wr^\star_7$	$\wr^\star_8$	$\wr^\star_9$	$\wr^\star_{10}$	$\wr^\star_{11}$	$\wr^\star_{12}$	$\wr^\star_{13}$	$\wr^\star_{14}$	$\wr^\star_{15}$
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	p	p	p	p	p	p	p	p
a	p	a	a	a	a	p	p	p	p	a	a	a	a	p	p	p	p
p	a	a	a	p	p	a	a	p	p	a	a	p	p	a	a	p	p
p	p	a	p	a	p	a	p	a	p	a	p	a	p	a	p	a	p

6.20. Teorēma. *Visas divvietīgās loģiskās operācijas izsakāmas ar* $\neg, \wedge$ *un* $\vee$.

$$\square \quad \begin{array}{rclcl}
A \wr^\star_0 B & \simeq & a & \simeq & A \wedge B \wedge \neg A \wedge \neg B \\
A \wr^\star_1 B & \simeq & A \wedge B & & \\
A \wr^\star_2 B & \simeq & \neg(A \Rightarrow B) & \simeq & A \wedge \neg B \\
A \wr^\star_3 B & \simeq & A & \simeq & A \wedge (A \vee B) \\
A \wr^\star_4 B & \simeq & \neg(B \Rightarrow A) & \simeq & \neg A \wedge B \\
A \wr^\star_5 B & \simeq & B & \simeq & B \wedge (B \vee A) \\
A \wr^\star_6 B & \simeq & A \nabla B & \simeq & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \\
A \wr^\star_7 B & \simeq & A \vee B & & \\
A \wr^\star_8 B & \simeq & A \downarrow B & \simeq & \neg(A \vee B) \\
A \wr^\star_9 B & \simeq & A \Leftrightarrow B & \simeq & (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
A \wr^\star_{10} B & \simeq & \neg B & \simeq & \neg B \wedge (\neg B \vee A) \\
A \wr^\star_{11} B & \simeq & B \Rightarrow A & \simeq & A \vee \neg B \\
A \wr^\star_{12} B & \simeq & \neg A & \simeq & \neg A \wedge (\neg A \vee B) \\
A \wr^\star_{13} B & \simeq & A \Rightarrow B & \simeq & \neg A \vee B \\
A \wr^\star_{14} B & \simeq & A \mid B & \simeq & \neg(A \wedge B) \\
A \wr^\star_{15} B & \simeq & p & \simeq & A \vee B \vee \neg A \vee \neg B \quad \blacksquare
\end{array}$$

Kā redzams no iepriekšējās tabulas, tad dažām jaunajām operācijām ir savi specifiski apzīmējumi. Operāciju $\wr^\star_6$ sauc par *izslēdzošo vai*, kā arī par *antiekvivalenci*, un tās pierakstam dažkārt lieto īpašu simbolu ∇. Operāciju $\wr^\star_8$ sauc par *Pīrsa bultu*, un tās pierakstam parasti lieto simbolu $\downarrow$. Konjunkcijas negācija (operācija $\wr^\star_{14}$) citādi pazīstama kā *Šefera svītra*, un tās pierakstam parasti lieto simbolu $\mid$. Pīrsa bultu un Šefera svītru sauc par *universālām operācijām.*

Tagad pāriesim pie šādas terminoloģijas pamatojuma.

6.21. Apgalvojums. *Konjunkcijas izsakāma ar* $\neg$ *un* $\vee$.

□ Saskaņā ar de Morgana likumu $\neg(A \wedge B) \simeq \neg A \vee \neg B$.
No šejienes $A \wedge B \simeq \neg(\neg A \vee \neg B)$. ■

6.22. Sekas. *Visas divvietīgās loģiskās operācijas izsakāmas ar* $\neg$ *un* $\vee$.

6.23. Apgalvojums. *Negācija un disjunkcija izsakāmas ar* $\downarrow$.

□ Tabula

A	$\neg A$	$A \downarrow A$
a	p	p
p	a	a

demonstrē, ka $\neg A \simeq A \downarrow A$.

Tā kā

$$\neg(A \vee B) \simeq A \downarrow B,$$

tad

$$\begin{aligned} A \vee B &\simeq \neg(A \downarrow B) \\ &\simeq (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \quad ■ \end{aligned}$$

6.24. Teorēma. *Visas divvietīgās loģiskās operācijas izsakāmas ar* $\downarrow$.

□ Ņemam vērā, ka visas divvietīgās loģiskās operācijas izsakāmas ar $\neg$ un $\vee$ (6.22. Sekas). Tagad balstoties uz 6.23. Apgalvojumu varam secināt, ka visas divvietīgās loģiskās operācijas izsakāma ar Pīrsa bultu. ■

6.25. Vingrinājumi. (i) Pierādīt, ka disjunkcija izsakāma ar negāciju un konjunkciju.

(ii) Pierādīt, ka visas divvietīgās loģiskās operācijas izsakāmas ar negāciju un konjunkciju.

(iii) Pierādīt, ka negācija izsakāma ar Šefera svītru.

(iv) Pierādīt, ka konjunkcija izsakāma ar Šefera svītru.

(v) Pierādīt, ka visas divvietīgās loģiskās operācijas izsakāmas ar Šefera svītru.

7. nodaļa

NORMĀLFORMAS

Normālforma, tās atrašana, izcila normālforma.

Matemātiskajā analīzē pierāda tā saukto Veierštrāsa teorēmu:

Ja f ir segmentā $[a;b]$ nepārtraukta funkcija, tad katram $\varepsilon > 0$ atrodams tāds polinoms $p(x)$, ka visiem $x \in [a;b]$ izpildās nevienādība

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon\,.$$

Citiem vārdiem sakot, uzdotās precizitātes robežās, jebkuru segmentā $[a;b]$ nepārtrauktu funkciju var aizstāt ar polinomu.

Ja gribam ieviest polinomiem analoģiskus objektus arī izteikumu loģikā, tad jāizlemj, kādas loģiskās operācijas šai nolūkā izmantot. Tā kā pēc savām formālajām īpašībām reizināšanai un saskaitīšanai vienādā mērā līdzīgas divas operācijas — konjunkcija un disjunkcija, tad loģikā izmanto divējādus "loģiskos polinomus" — disjunktīvās normālformas un konjunktīvās normālformas.

7.1. Definīcija. *Vārdu ϵA sauc par literu, ja $\epsilon \in \{\lambda, \neg\}$, bet A ir mainīgais. Konjunkciju, kuras locekļi ir literi, sauc par vienkāršu konjunkciju. Disjunkciju, kuras locekļi ir literi, sauc par vienkāršu disjunkciju. Gan vienkārša disjunkcija, gan vienkārša konjunkcija var sastāvēt arī no viena paša locekļa.*

7.2. Piemēri. Formulas A un $\neg B$ ir gan vienkāršas konjunkcijas, gan vienkāršas disjunkcijas. Turpretim formulas

$$\neg\neg A, \qquad A \Rightarrow B, \qquad A \Leftrightarrow B,$$
$$A \vee (B \wedge C), \quad A \wedge \neg(B \wedge C), \quad \neg(\neg A \vee B) \vee C$$

nav nedz vienkāršas disjunkcijas, nedz vienkāršas konjunkcijas.

Formulas

$$A \vee \neg B \vee \neg C, \quad A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3, \quad \neg A \vee B \vee \neg B \vee \neg A$$

ir vienkāršas disjunkcijas, bet nav vienkāršas konjunkcijas. Savukārt formulas

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C, \quad A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3, \quad \neg A \wedge B \wedge \neg B \wedge \neg A$$

ir vienkāršas konjunkcijas, bet nav vienkāršas disjunkcijas.

7.3. Definīcija. *Disjunkciju, kuras locekļi ir vienkāršas konjunkcijas, sauc par disjunktīvu normālformu. Konjunkciju, kuras locekļi ir vienkāršas disjunkcijas, sauc par konjunktīvo normālformu. Gan disjunktīvā normālforma, gan konjunktīvā normālforma var sastāvēt arī no viena paša locekļa.*

7.4. Piemēri. Formulas

$$\neg A \vee B \vee C, \quad A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_1, \quad B$$

ir gan disjunktīvas, gan konjunktīvas normālformas. Formulas

$$(\neg A_1 \wedge A_2) \vee A_1, \quad (A \wedge A) \vee (B \wedge \neg A), \quad A \vee (B \wedge B) \vee A$$

ir disjunktīvas normālformas, bet nav konjunktīvas normālformas. Formulas

$$A \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg A, \quad (A \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A), \quad (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_1)$$

ir konjunktīvas normālformas, bet nav disjunktīvas normālformas. Savukārt formulas

$$\neg(A \vee B) \wedge A, \quad A \wedge (B \vee A) \wedge ((A \wedge B) \vee C)$$

nav nedz disjunktīvas, nedz konjunktīvas normālformas.

7.5. Definīcija. *Vienkāršu konjunkciju*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} L_i$$

sauc par mainīgo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *vienības konstituenti, ja tā ir ekvivalenta kādai vienkāršai konjunkcijai*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \epsilon_i A_i \,.$$

Vienkāršu disjunkciju

$$\bigvee_{i=1}^{n} L_i$$

sauc par mainīgo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *nulles konstituenti, ja tā ir ekvivalenta kādai vienkāršai disjunkcijai*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \epsilon_i A_i \,.$$

Uzreiz no definījas izriet, ka visi mainīgie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir gan vienības konstituentes, gan nulles konstituentes argumenti, bez tam katrs no šiem mainīgajiem formulā ieiet tieši vienu reizi.

7.6. Piemēri. Formulas

$$\neg A \vee B \vee \neg C, \quad A \vee \neg B \vee C, \quad \neg B \vee A \vee C$$

ir mainīgo A, B, C nulles konstituentes, taču formulas

$$\neg A \vee B \vee C \vee \neg A, \quad \neg A \vee B \vee C \vee \neg D$$

nav mainīgo A, B, C nulles konstituentes, kaut arī tās ir vienkāršas disjunkcijas. Atzīmēsim, ka formula $\neg A \vee B \vee C \vee \neg D$ ir mainīgo A, B, C, D nulles konstituente. Līdzīgi formulas

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C, \quad A \wedge \neg B \wedge C, \quad \neg B \wedge A \wedge C$$

ir mainīgo A, B, C vienības konstituentes, taču formulas

$$\neg A \wedge \neg B, \quad \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$$

nav mainīgo A, B, C vienības konstituentes, kaut arī tās ir vienkāršas disjunkcijas. Atzīmēsim, ka formula $\neg A \wedge \neg B$ ir mainīgo A, B vienības konstituente, savukārt $\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$ ir mainīgo A, B, C, D vienības konstituente.

7.7. Definīcija. *Disjunktīvu normālformu sauc par mainīgo*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

izcilu disjunktīvu normālformu, ja tās locekļi ir mainīgo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *neekvivalentas vienības konstituentes.*

Konjunktīvu normālformu sauc par mainīgo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *izcilu konjunktīvu normālformu, ja tās locekļi ir mainīgo* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *neekvivalentas nulles konstituentes.*

Vispārīgā veidā mainīgo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izcilo disjunktīvo normālformu var pierakstīt šādi:

$$\bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} A_j,$$

savukārt mainīgo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izcilo konjunktīvo normālformu var pierakstīt šādi:

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} A_j,$$

7.8. Piemēri. Formula

$$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

ir mainīgo A, B, C izcila disjunktīva normālforma, bet formula

$$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$$

nav mainīgo A, B, C izcila disjunktīva normālforma. Formula

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$$

ir mainīgo A, B, C izcila konjunktīva normālforma, bet nav nedz mainīgo A, B, nedz mainīgo A, B, C, D izcila konjunktīva normālforma.

7.9. Definīcija. *Disjunktīvu normālformu* $\mathfrak{D}$ *sauc par formulas* $\mathfrak{F}$ *disjunktīvo normālformu, ja*

$$\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{F}.$$

Izcilu disjunktīvu normālformu $\mathfrak{D}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *sauc par formulas* $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *izcilo disjunktīvo normālformu, ja*

$$\mathfrak{D}(A_1, A_2, \ldots, A_n) \simeq \mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Konjunktīvu normālformu $\mathfrak{D}$ *sauc par formulas* $\mathfrak{F}$ *konjunktīvo normālformu, ja*

$$\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{F}.$$

Izcilu konjunktīvu normālformu $\mathfrak{D}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *sauc par formulas* $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *izcilo konjunktīvo normālformu, ja*

$$\mathfrak{D}(A_1, A_2, \ldots, A_n) \simeq \mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

7.10. Piemēri. Tā kā

$$(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow C \quad \simeq \quad (\neg A \wedge \neg B) \vee C \simeq (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)\,,$$

tad formula $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$ ir formulas $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ disjunktīvā normālforma, bet nav šīs formulas izcilā disjunktīvā normālforma. Savukārt formula $(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ ir formulas $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ konjunktīvā normālforma, bet nav šīs formulas izcilā konjunktīvā normālforma.

Tā kā

$$A \triangledown B \quad \simeq \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \simeq (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)\,,$$

tad formula $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ ir formulas $A \triangledown B$ izcilā disjunktīvā normālforma. Savukārt formula $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ ir tās pašas formulas $A \triangledown B$ izcilā konjunktīvā normālforma. Saprotams, ka formula $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ ir formulas $A \triangledown B$ disjunktīvā normālforma, jo katra izcila disjunktīva normālforma ir disjunktīva normālforma. Līdzīgi formula $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ ir formulas $A \triangledown B$ konjunktīvā normālforma, jo katra izcila konjunktīva normālforma ir konjunktīva normālforma.

Dabīgi izvirzās jautājums — vai katrai formulai var atrast disjunktīvo normālformu (eksistences problēma), tāpat izvirzās jautājums — vai dotajai formulai ir viena vai vairākas disjunktīvās normālformas (unitātes problēma). Ja jau mēs izvirzam šos jautājumus disjunktīvai normālformai, tad tik pat dabīgi tos izvirzīt arī konjunktīvai normālformai, kā arī izcilai disjunktīvai un izcilai konjunktīvai normālformai.

7.11. Apgalvojums. *Vienības konstituentes*

$$\epsilon_1 A_1 \wedge \epsilon_2 A_2 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n A_n$$

vērtību ailē ir tieši viena vērtība p, un tā atrodas tabulas tajā rindiņā, kurā

$$A_1 \sim \epsilon_1 p,\ A_2 \sim \epsilon_2 p,\ \ldots,\ A_n \sim \epsilon_n p\,.$$

□ Atzīmētajā rindiņā vienības konstituente ir patiesa, jo, ievērojot divkāršās negācijas likumu (6.13. Vingrinājums, formula (vii)), katrs konjunkcijas loceklis ir patiess. Turpretim katrā citā rindiņā vismaz viens konjunkcijas loceklis ir aplams: tātad arī visa konjunkcija ir aplama, t.i, dotajā gadījumā vienības konstituente $\epsilon_1 A_1 \wedge \epsilon_2 A_2 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n A_n$ ir aplama. ■

7.12. Piemērs.

A	B	C	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$
a	a	a	a
a	a	p	a
a	p	a	a
a	p	p	a
p	a	a	p
p	a	p	a
p	p	a	a
p	p	p	a

Kā redzams no vērtību tabulas, tad vienības konstituentes $A \wedge \neg B \wedge \neg C$ vērtību aile ir $'(aaaapaaa)$, un šai ailē ir tikai viena vērtība p. Šai vērtībai tabulā atbilst rindiņa paa, t.i., $A \sim p$, $B \sim \neg p$, $C \sim \neg p$.

7.13. Apgalvojums. *Ja $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ ir vienkāršas konjunkcijas, tad disjunktīvā normālforma*

$$\mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{K}_m$$

ir patiesa tikai tajās vērtību tabulas rindiņās, kurās ir patiess vismaz viens no normālformas locekļiem.

□ Pieminētajās rindiņās disjunktīvā normālforma ir patiesa kā disjunkcija, kas satur vismaz vienu patiesu locekli. Pretējā gadījumā visi disjunkcijas locekļi ir aplami, tāpēc arī pati disjunkcija ir aplama. ■

7.14. Piemērs. Disjunktīvās normālformas

$$\mathfrak{F} \leftharpoondown (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$$

locekļi ir vienkāršas konjunkcijas: $\mathfrak{K}_1 \leftharpoondown A \wedge \neg B$ un $\mathfrak{K}_2 \leftharpoondown \neg A \wedge B \wedge \neg C$. Tās patiesuma vērtību tabula izskatās šādi:

A	B	C	$\mathfrak{K}_1$	$\mathfrak{K}_2$	$\mathfrak{F}$
a	a	a	a	a	a
a	a	p	a	a	a
a	p	a	a	p	p
a	p	p	a	a	a
p	a	a	p	a	p
p	a	p	p	a	p
p	p	a	a	a	a
p	p	p	a	a	a

Kā redzams no tabulas, tad disjunktīvā normālforma $\mathfrak{F}$ ir patiesa tikai tajās vērtību tabulas rindiņās (trešajā, piektajā un sestajā), kurās ir patiess vismaz viens no normālformas locekļiem $\mathfrak{K}_1$ (trešajā) un $\mathfrak{K}_2$ (piektajā un sestajā).

7.15. Sekas. *Ja $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ ir vienības konstituentes, tad izcilā disjunktīvā normālforma*

$$\mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{K}_m$$

ir patiesa tikai tajās vērtību tabulas rindiņās, kurās ir patiesa kāda no vienības konstituentēm $\mathfrak{K}_j$.

7.16. Piemērs. Formulas

$$\mathfrak{F} \leftharpoondown (A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Leftrightarrow B \vee C)$$

tabula izskatās šādi:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$B \vee C$	$\neg A \Leftrightarrow B \vee C$	$\mathfrak{F}$
a	a	a	p	p	a	a	a
a	a	p	p	p	p	p	p
a	p	a	p	p	p	p	p
a	p	p	p	p	p	p	p
p	a	a	a	a	a	p	a
p	a	p	a	a	p	a	a
p	p	a	p	a	p	a	a
p	p	p	p	a	p	a	a

Formulas $\mathfrak{F}$ izcilā disjunktīvā normālforma ir formula

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

Līdz ar to mūsu rīcībā ir metode, kā atrast formulas $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ izcilo disjunktīvo normālformu. Sastādam formulas vērtību tabulu. Tā rezultātā mūsu rīcībā ir arī formulas $\mathfrak{F}$ vērtību aile $'(v_1 v_2 \ldots v_k)$. Tagad pievēršam uzmanību tikai tām rindiņām i, kurām $v_i \sim p$. Ja i-tajā rindiņā

$$A_1 \sim \epsilon_1 p,\ A_2 \sim \epsilon_2 p,\ \ldots,\ A_n \sim \epsilon_n p\,,$$

tad izvēlamies vienības konstituenti

$$\epsilon_1 A_1 \wedge \epsilon_2 A_2 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n A_n\,.$$

Šādu vienības konstituenšu disjunkcija ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilā disjunktīvā normālforma. Tagad pilnīgi noskaidrots arī jautājums par izcilās disjunktīvās normālformas eksistenci un unitāti.

7.17. Teorēma. *Katrai izpildāmai formulai eksistē viena vienīga izcilā disjunktīvā normālforma.*

Atliek tikai piebilst, ka unitāte te domāta ar precizitāti līdz vienības konstituenšu secībai; arī katras vienības konstituentes vienīgums ir jāsaprot ar precizitāti līdz tajā ieejošo literu secībai.

Līdzīgi iegūstama arī formulas izcilā konjunktīvā normālforma. Aplūkosim šo jautājumu detalizētāk.

7.18. Apgalvojums. *Nulles konstituentes*

$$\epsilon_1 A_1 \vee \epsilon_2 A_2 \vee \ldots \vee \epsilon_n A_n$$

vērtību ailē ir tieši viena vērtība a, un tā atrodas tabulas tajā rindiņā, kurā

$$A_1 \sim \epsilon_1 a,\ A_2 \sim \epsilon_2 a,\ \ldots,\ A_n \sim \epsilon_n a\,.$$

□ Atzīmētajā rindiņā nulles konstituente ir aplama, jo, ievērojot divkāršās negācijas likumu (6.13. Vingrinājums, formula (vii)), katrs disjunkcijas loceklis ir aplams. Turpretim katrā citā rindiņā vismaz viens disjunkcijas loceklis ir patiess: tātad arī visa disjunkcija ir patiesa, t.i, dotajā gadījumā nulles konstituente $\epsilon_1 A_1 \vee \epsilon_2 A_2 \vee \ldots \vee \epsilon_n A_n$ ir patiesa. ■

7.19. Piemērs.

A	B	C	$A \vee \neg B \vee \neg C$
a	a	a	p
a	a	p	p
a	p	a	p
a	p	p	a
p	a	a	p
p	a	p	p
p	p	a	p
p	p	p	p

Kā redzams no vērtību tabulas, tad nulles konstituentes $A \vee \neg B \vee \neg C$ vērtību aile ir $'(pppapppp)$, un šai ailē ir tikai viena vērtība a. Šai vērtībai tabulā atbilst rindiņa app, t.i., $A \sim a$, $B \sim \neg a$, $C \sim \neg a$.

7.20. Apgalvojums. *Ja $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ ir vienkāršas disjunkcijas, tad konjunktīvā normālforma*

$$\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m$$

ir aplama tikai tajās vērtību tabulas rindiņās, kurās ir aplams vismaz viens no normālformas locekļiem.

□ Pieminētajās rindiņās konjunktīvā normālforma ir aplama kā konjunkcija, kas satur vismaz vienu aplamu locekli. Pretējā gadījumā visi konjunkcijas locekļi ir patiesi, tāpēc arī pati konjunkcija ir patiesa. ■

7.21. Piemērs. Konjunktīvās normālformas

$$\mathfrak{F} \leftharpoondown (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

locekļi ir vienkāršas disjunkcijas: $\mathfrak{K}_1 \leftharpoondown A \vee \neg B$ un $\mathfrak{K}_2 \leftharpoondown \neg A \vee B \vee \neg C$. Tās patiesuma vērtību tabula izskatās šādi:

A	B	C	$\mathfrak{K}_1$	$\mathfrak{K}_2$	$\mathfrak{F}$
a	a	a	p	p	p
a	a	p	p	p	p
a	p	a	a	p	a
a	p	p	a	p	a
p	a	a	p	p	p
p	a	p	p	a	a
p	p	a	p	p	p
p	p	p	p	p	p

Kā redzams no tabulas, tad konjunktīvā normālforma $\mathfrak{F}$ ir aplama tikai tajās vērtību tabulas rindiņās (trešajā, ceturtajā un sestajā), kurās ir aplams vismaz viens no normālformas locekļiem $\mathfrak{K}_1$ (trešajā un ceturtajā) un $\mathfrak{K}_2$ (sestajā).

7.22. Sekas. *Ja $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ ir nulles konstituentes, tad izcilā konjunktīvā normālforma*

$$\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m$$

ir aplama tikai tajās vērtību tabulas rindiņās, kurās ir aplama kāda no nulles konstituentēm $\mathfrak{K}_j$.

Līdz ar to mūsu rīcībā ir metode, kā atrast formulas $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ izcilo konjunktīvo normālformu. Sastādam formulas vērtību tabulu. Tā rezultātā mūsu rīcībā ir arī formulas $\mathfrak{F}$ vērtību aile $'(v_1 v_2 \ldots v_k)$. Tagad pievēršam uzmanību tikai tām rindiņām i, kurām $v_i \sim a$. Ja i-tajā rindiņā

$$A_1 \sim \epsilon_1 a,\ A_2 \sim \epsilon_2 a,\ \ldots,\ A_n \sim \epsilon_n a\,,$$

tad izvēlamies nulles konstituenti

$$\epsilon_1 A_1 \vee \epsilon_2 A_2 \vee \ldots \vee \epsilon_n A_n\,.$$

Šādu nulles konstituenšu konjunkcija ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilā konjunktīvā normālforma. Tagad pilnīgi noskaidrots arī jautājums par izcilās konjunktīvās normālformas eksistenci un unitāti.

7.23. Teorēma. *Katrai atspēkojamai formulai eksistē viena vienīga izcilā konjunktīvā normālforma.*

Atliek tikai piebilst (līdzīgi kā izcilās disjunktīvās normālformas gadījumā), ka unitāte te domāta ar precizitāti līdz nulles konstituenšu secībai; arī katras nulles konstituentes vienīgums ir jāsaprot ar precizitāti līdz tajā ieejošo literu secībai.

7.24. Piemērs. Formulas

$$\mathfrak{F} \leftharpoondown (A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B \vee C)$$

tabula izskatās šādi:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$B \vee C$	$\neg A \Rightarrow B \vee C$	$\mathfrak{F}$
a	a	a	p	p	a	a	a
a	a	p	p	p	p	p	p
a	p	a	p	p	p	p	p
a	p	p	p	p	p	p	p
p	a	a	a	a	a	p	a
p	a	p	a	a	p	p	a
p	p	a	p	a	p	p	p
p	p	p	p	a	p	p	p

Formulas $\mathfrak{F}$ izcilā konjunktīvā normālforma ir formula

$$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

7.25. Teorēma. *Visas loģiskās operācijas izsakāmas ar* $\neg, \wedge$ *un* $\vee$*.*

□ Pieņemsim, ka dota n-vietīga loģiskā operācija

$$o : \{a, p\}^n \to \{a, p\},$$

t.i., mums ir n-argumentu operācija $o(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Tātad katram patiesuma vērtību kortežam

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

atbilst kāda operācijas patiesumvērtība v. Šai operācijai līdzīgi kā argumentu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formulai var sastādīt vērtību tabulu.

Ja tabulas pēdējā ailē (kā kādas formulas vērtību ailē) ir kaut viena vērtība p, tad varam uzkonstruēt izcilu disjunktīvu normālformu

$$\mathfrak{F}_d(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

saskaņā ar iepriekš piedāvāto algoritmu. Pretējā gadījumā varam uzkonstruēt izcilu konjunktīvu normālformu

$$\mathfrak{F}_k(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Ja $\mathfrak{F}_d$ un $\mathfrak{F}_k$ mēs uztveram kā argumentu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ loģiskās funkcijas, kas pieder operāciju kopas $\{\neg, \vee, \wedge\}$ klonam, tad

$$\mathfrak{F}_d(A_1, A_2, \ldots, A_n) = o(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

un

$$\mathfrak{F}_k(A_1, A_2, \ldots, A_n) = o(A_1, A_2, \ldots, A_n). \quad \blacksquare$$

7.26. Vingrinājumi. *Kurām formulām eksistē izcilā disjunktīvā normālforma, kurām — izcilā konjunktīvā normālforma? Atrast izcilo disjunktīvo normālformu formulām, kurām tā eksistē. Atrast izcilo konjunktīvo normālformu formulām, kurām tā eksistē.*

(i) $\neg A \wedge A$

(ii) $A \Rightarrow \neg(B \Leftrightarrow \neg A)$

(iii) $(A \wedge (B \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \Rightarrow A) \vee B)$

(iv) $(C \vee (B \wedge A)) \vee (\neg(B \Leftrightarrow \neg C) \Rightarrow A)$

(v) $A \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg D \Rightarrow B))$

8. nodaļa

TEORĒMU LOĢISKĀ STRUKTŪRA

Konsekventi un implikanti. Teorēmu loģiskā struktūra, netiešie pierādījumi.

Slēdziens ir tradicionāls un viens no vecākajiem loģikas jēdzieniem. Par slēdzienu sauc tādu domāšanas formu, kurā no viena vai vairākiem apgalvojumiem izsecina jaunu apgalvojumu. Dažādu slēdzienu analīze ir viens no centrālajiem loģikas uzdevumiem. Mēs aprobežosimies ar diviem jautājumiem:

(i) Kādus secinājumus var izdarīt no dotajiem apgalvojumiem?

(ii) No kādiem apgalvojumiem var iegūt dotos secinājumus?

Abu problēmu atrisinājumu mēs aplūkosim izteikumu loģikas līmenī, izmantojot izcilās normālformas.

8.1. Definīcija. *Formulu $\mathfrak{K}$ sauc par formulas $\mathfrak{F}$ konsekventu, ja $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{K}$ ir tautoloģija.*

Ja formula $\mathfrak{T}$ ir tautoloģija, tad $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{T}$ ir tautoloģija. Tautoloģija ir arī formula $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{F}$. Šī iemesla dēļ pašu formulu $\mathfrak{F}$ un jebkuru tautoloģiju sauc par formulas $\mathfrak{F}$ *triviālajiem konsekventiem*, pārejos — par *netriviālajiem.* Mēs interesēsimies, kā atrodami netriviālie konsekventi.

8.2. Piemērs. Formula

$$A \vee B \Rightarrow C$$

ir formulas

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \tag{8.1}$$

konsekvents, jo

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

ir tautoloģija (6.2. Piemērs (i)). Tās pašas formulas konsekventi ir arī formulas

$$\neg(A \vee B) \vee C, \qquad (\neg A \wedge \neg B) \vee C\,.$$

Vispār mēs varam uzkonstruēt bezgala daudzas formulas, kas ir formulas (8.1) konsekventi, piemēram,

$$A \vee B \Rightarrow C\ , \quad A \vee B \Rightarrow C \vee C \quad , \ldots , \quad A \vee B \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} C \quad , \ldots$$

taču visas šīs formulas ir savstarpēji ekvivalentas. Līdz ar to dabīgi ir meklēt tikai neekvivalentus konsekventus.

8.3. Apgalvojums. *Katra nulles konstituente, kas ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilās konjunktīvās normālformas loceklis, ir formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents.*

□ Pieņemsim, ka

$$\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m$$

ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilā konjunktīvā normālforma, tad

$$\mathfrak{F} \simeq \mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m$$

un

$$\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m \Rightarrow \mathfrak{K}_j$$

ir tautoloģija katram $j \in \overline{1, m}$. Tā rezultātā $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{K}_j$ ir tautoloģija; tātad $\mathfrak{K}_j$ ir formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents. ■

8.4. Apgalvojums. *Ja $\mathfrak{K}_1$ un $\mathfrak{K}_2$ ir formulas $\mathfrak{F}$ konsekventi, tad $\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2$ arī ir formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents.*

□ Pieņemsim pretējo, proti, $\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2$ nav formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents. Tas nozīmē, ka eksistē tādas formulas $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2$ argumentu vērtības, ka $\mathfrak{F} \sim p$, bet $\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \sim a$. Ja reiz $\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \sim a$, tad vai nu $\mathfrak{K}_1 \sim a$, vai arī $\mathfrak{K}_2 \sim a$.

(i) Ja $\mathfrak{K}_1 \sim a$, tad $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{K}_1 \sim a$, un tāpēc $\mathfrak{K}_1$ nevar būt formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents.

(ii) Ja $\mathfrak{K}_2 \sim a$, tad $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{K}_2 \sim a$, un tāpēc $\mathfrak{K}_2$ nevar būt formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents.

Esam ieguvuši pretrunu. ■

8.5. Teorēma. *Pieņemsim, ka $\mathfrak{N}$ ir formulas $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ izcilā konjunktīvā normālforma. Formula $\mathfrak{K}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ir formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents tad un tikai tad, ja $\mathfrak{K}$ ir formulas $\mathfrak{F}$ triviālais konsekvents vai arī tā ir ekvivalenta kādai formulas $\mathfrak{N}$ nulles konstituenšu konjunkcijai.*

$\square$ $\Leftarrow$ 8.3. un 8.4. Apgalvojums.

$\Rightarrow$ Pieņemsim, ka $\mathfrak{K}$ ir formulas $\mathfrak{F}$ konsekvents,

$$\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m$$

ir formulas $\mathfrak{K}$ izcilā konjunktīvā normālforma un

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{N}_k$$

ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilā konjunktīvā normālforma (te visas formulas $\mathfrak{N}_j$ ir nulles konstituentes). Tagad pieņemsim, ka $\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m$ nav ekvivalenta nevienai nulles konstituenšu $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$ konjunkcijai. Tas nozīmē, ka atrodama tāda nulles konstituente $\mathfrak{K}_i$, kas nav ekvivalenta nevienai no konstituentēm $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$.

Pieņemsim, ka

$$\mathfrak{K}_i \simeq \epsilon_1 A_1 \vee \epsilon_2 A_2 \vee \ldots \vee \epsilon_n A_n \,.$$

Ja

$$A_1 \sim \epsilon_1 a, A_2 \sim \epsilon_2 a, \ldots, A_n \sim \epsilon_n a \,,$$

tad $\mathfrak{K}_i \sim a$. Līdz ar to

$$\mathfrak{K} \sim \mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{K}_m \sim a \,.$$

Saskaņā ar 7.18. Apgalvojumu visas nulles konstituentes $\mathfrak{N}_j \sim p$. Tā rezultātā

$$\mathfrak{F} \sim \mathfrak{N} \sim p \,.$$

Tas demonstrē, ka formula $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{K}$ nav tautoloģija. Pretruna! $\blacksquare$

8.6. Piemērs. Formulas $A \vee B \Rightarrow C$ vērtību tabula izskatās šādi:

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee B \Rightarrow C$
a	a	a	a	p
a	a	p	a	p
a	p	a	p	a
a	p	p	p	p
p	a	a	p	a
p	a	p	p	p
p	p	a	p	a
p	p	p	p	p

Formulas $A \vee B \Rightarrow C$ izcilā konjunktīvā normālforma ir formula

$$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)\,.$$

Ņemot vērā tikko pierādīto teorēmu formulas $A \vee B \Rightarrow C$ netriviālie konsekventi ir formulas

$$\begin{array}{rl} A \vee \neg B \vee C, & (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C), \\ \neg A \vee B \vee C, & (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C), \\ \neg A \vee \neg B \vee C, & (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C). \end{array}$$

Tikpat labi mēs varam apgalvot arī, ka formulas $A \vee B \Rightarrow C$ netriviālie konsekventi ir formulas

$$\begin{array}{lll} A \Rightarrow C, & A \Rightarrow B \vee C, & A \wedge B \Rightarrow C, \\ B \Rightarrow C, & B \Rightarrow A \vee C, & (A \triangledown B) \Rightarrow C. \end{array}$$

Saprotams tās visas ir ekvivalentas iepriekš uzskaitītajām.

8.7. Vingrinājumi. *Kurām formulām eksistē netriviāli konsekventi? Atrast netriviālos konsekventus formulām, kurām tie eksistē.*

(i) $\neg A \wedge A$

(ii) $A \Rightarrow \neg(B \Leftrightarrow \neg A)$

(iii) $(A \wedge (B \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \Rightarrow A) \vee B)$

(iv) $(C \vee (B \wedge A)) \vee (\neg(B \Leftrightarrow \neg C) \Rightarrow A)$

(v) $A \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg D \Rightarrow B))$

8.8. Definīcija. *Formulu $\mathfrak{I}$ sauc par formulas $\mathfrak{F}$* implikantu*, ja $\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{F}$ ir tautoloģija.*

Ja formula $\mathfrak{K}$ ir kontradikcija, tad $\mathfrak{K} \Rightarrow \mathfrak{F}$ ir tautoloģija. Tautoloģija ir arī formula $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{F}$. Šī iemesla dēļ pašu formulu $\mathfrak{F}$ un jebkuru kontradikciju sauc par formulas $\mathfrak{F}$ *triviālajiem implikantiem*, pārejos — par *netriviālajiem.* Mēs interesēsimies, kā atrodami netriviālie implikanti.

8.9. Piemērs. Formula

$$C$$

ir formulas

$$A \vee B \Rightarrow C \tag{8.2}$$

implikants, jo
$$C \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$
ir tautoloģija (6.2. Piemērs (i)). Tās pašas formulas implikanti ir arī formulas
$$A \wedge C, \qquad B \wedge C\,.$$
Vispār mēs varam uzkonstruēt bezgala daudzas formulas, kas ir formulas (8.2) implikanti, piemēram,
$$C\,, \quad C \wedge C \quad , \ldots , \quad \bigwedge_{i=1}^{n} C \quad , \ldots$$
taču visas šīs formulas ir savstarpēji ekvivalentas. Līdz ar to dabīgi ir meklēt tikai neekvivalentus implikantus.

8.10. Apgalvojums. *Katra vienības konstituente, kas ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilās disjunktīvās normālformas loceklis, ir formulas $\mathfrak{F}$ implikants.*

□ Pieņemsim, ka
$$\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m$$
ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilā disjunktīvā normālforma, tad
$$\mathfrak{F} \simeq \mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m$$
un
$$\mathfrak{D}_j \Rightarrow \mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m$$
ir tautoloģija katram $j \in \overline{1,m}$. Tā rezultātā $\mathfrak{D}_j \Rightarrow \mathfrak{F}$ ir tautoloģija; tātad $\mathfrak{D}_j$ ir formulas $\mathfrak{F}$ imlikants. ■

8.11. Apgalvojums. *Ja $\mathfrak{D}_1$ un $\mathfrak{D}_2$ ir formulas $\mathfrak{F}$ imlikanti, tad $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2$ arī ir formulas $\mathfrak{F}$ implikants.*

□ Pieņemsim pretējo, proti, $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2$ nav formulas $\mathfrak{F}$ implikants. Tas nozīmē, ka eksistē tādas formulas $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \Rightarrow \mathfrak{F}$ argumentu vērtības, ka $\mathfrak{F} \sim a$, bet $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \sim p$. Ja reiz $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \sim p$, tad vai nu $\mathfrak{D}_1 \sim p$, vai arī $\mathfrak{D}_2 \sim p$.

(i) Ja $\mathfrak{D}_1 \sim p$, tad $\mathfrak{D}_1 \Rightarrow \mathfrak{F} \sim a$, un tāpēc $\mathfrak{D}_1$ nevar būt formulas $\mathfrak{F}$ implikants.

(ii) Ja $\mathfrak{D}_2 \sim p$, tad $\mathfrak{D}_2 \Rightarrow \mathfrak{F} \sim a$, un tāpēc $\mathfrak{D}_2$ nevar būt formulas $\mathfrak{F}$ implikants.

Esam ieguvuši pretrunu. ■

8.12. Teorēma. *Pieņemsim, ka $\mathfrak{N}$ ir formulas $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ izcilā disjunktīvā normālforma. Formula $\mathfrak{D}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ir formulas $\mathfrak{F}$ implikants tad un tikai tad, ja $\mathfrak{D}$ ir formulas $\mathfrak{F}$ triviālais implikants vai arī tā ir ekvivalenta kādai formulas $\mathfrak{N}$ vienības konstituenšu disjunkcijai.*

$\square$ $\Leftarrow$ 8.10. un 8.11. Apgalvojums.

$\Rightarrow$ Pieņemsim, ka $\mathfrak{D}$ ir formulas $\mathfrak{F}$ implikants,

$$\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m$$

ir formulas $\mathfrak{D}$ izcilā disjunktīvā normālforma un

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_k$$

ir formulas $\mathfrak{F}$ izcilā disjunktīvā normālforma (te visas formulas $\mathfrak{N}_j$ ir vienības konstituentes). Tagad pieņemsim, ka $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m$ nav ekvivalenta nevienai vienības konstituenšu $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$ disjunkcijai. Tas nozīmē, ka atrodama tāda vienības konstituente $\mathfrak{D}_i$, kas nav ekvivalenta nevienai no konstituentēm $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$.

Pieņemsim, ka

$$\mathfrak{D}_i \simeq \epsilon_1 A_1 \wedge \epsilon_2 A_2 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n A_n \,.$$

Ja

$$A_1 \sim \epsilon_1 p, A_2 \sim \epsilon_2 p, \ldots, A_n \sim \epsilon_n p \,,$$

tad $\mathfrak{D}_i \sim p$. Līdz ar to

$$\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m \sim p \,.$$

Saskaņā ar 7.11. Apgalvojumu visas vienības konstituentes $\mathfrak{N}_j \sim a$. Tā rezultātā

$$\mathfrak{F} \sim \mathfrak{N} \sim a \,.$$

Tas demonstrē, ka formula $\mathfrak{D} \Rightarrow \mathfrak{F}$ nav tautoloģija. Pretruna! $\blacksquare$

8.13. Piemērs. Formulas $(C \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow A \wedge \neg C$ vērtību tabula izskatās šādi:

A	B	C	$A \vee B$	$C \Rightarrow A \vee B$	$A \wedge \neg C$	$(C \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow A \wedge \neg C$
a	a	a	a	p	a	a
a	a	p	a	a	a	p
a	p	a	p	p	a	a
a	p	p	p	p	a	a
p	a	a	p	p	p	p
p	a	p	p	p	a	a
p	p	a	p	p	p	p
p	p	p	p	p	a	a

Formulas $(C \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow A \wedge \neg C$ izcilā disjunktīvā normālforma ir formula

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)\,.$$

Ņemot vērā tikko pierādīto teorēmu formulas $(C \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow A \wedge \neg C$ netriviālie implikanti ir formulas

$$\begin{array}{rl} \neg A \wedge \neg B \wedge C, & (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C), \\ A \wedge \neg B \wedge \neg C, & (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C), \\ A \wedge B \wedge \neg C, & (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C). \end{array}$$

8.14. Vingrinājumi. *Kurām formulām eksistē netriviāli implikanti? Atrast netriviālos implikantus formulām, kurām tie eksistē.*

(i) $\neg A \wedge A$

(ii) $A \Rightarrow \neg(B \Leftrightarrow \neg A)$

(iii) $(A \wedge (B \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \Rightarrow A) \vee B)$

(iv) $(C \vee (B \wedge A)) \vee (\neg(B \Leftrightarrow \neg C) \Rightarrow A)$

(v) $A \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg D \Rightarrow B))$

Par *teorēmām* parasti mēdz saukt patiesus un pierādāmus apgalvojumus (mazāk nozīmīgas teorēmas sauc par *apgalvojumiem, faktiem, secinājumiem*), palīgteorēmas parasti sauc par *lemmām*). Visbiežāk teorēma no loģiskās struktūras viedokļa ir implikācija $\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}$. $\mathfrak{N}$ sauc par *teorēmas nosacījumu*, $\mathfrak{S}$ — par *teorēmas secinājumu*. Ja patiesa implikācija $\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}$, tad $\mathfrak{N}$ sauc par *pietiekamu* nosacījumu teorēmas secinājumam $\mathfrak{S}$. Savukārt teorēmas secinājumu $\mathfrak{S}$ sauc par *nepieciešamu* nosacījumu teorēmas nosacījumam $\mathfrak{N}$.

Jāatzīst, ka šis termins nav izdevies: daudz dabiskāk būtu sacīt, ka $\mathfrak{S}$ ir apgalvojuma $\mathfrak{N}$ *nepieciešamas sekas.* Tajos gadījumos, kad ir spēkā ekvivalence $\mathfrak{N} \Leftrightarrow \mathfrak{S}$, tad saka, ka $\mathfrak{S}$ ir *pietiekams un nepieciešams nosacījums* apgalvojumam $\mathfrak{N}$.

Apgalvojumu $\mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{N}$ sauc par teorēmas $\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}$ *apgriezto teorēmu.* Vispārīgā gadījumā tiešās teorēmas apgrieztā teorēma var izrādīties arī aplama (tātad īstenībā tā nemaz nebūs teorēma).

8.15. Piemērs. Teorēmas

- Ja funkcija $f(x)$ ir diferencējama punktā x_0, tad funkcija ir nepārtraukta šai punktā

apgrieztā teorēma ir apgalvojums:

- Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, tad funkcija ir diferencējama šai punktā.

Šai gadījumā apgrieztā teorēma ir aplama, tā piemēram, punktā $x_0 = 0$ funkcija $f(x) = |x|$ ir nepārtraukta, taču punktā $x_0 = 0$ funkcija $f(x) = |x|$ nav diferencējama.

Apgalvojumu $\neg\mathfrak{N} \Rightarrow \neg\mathfrak{S}$ sauc par teorēmas $\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}$ *pretējo teorēmu.* Saskaņā ar kontrapozīcijas likumu (6.13. Vingrinājums (xiv)) pretējā teorēma ir ekvivalenta ar apgriezto teorēmu (ilustrāciju skatīt 8.1. zīmējumā).

Apgalvojumu $\neg\mathfrak{S} \Rightarrow \neg\mathfrak{N}$ sauc par apgrieztās teorēmas $\mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{N}$ *pretējo teorēmu* jeb pretējās teorēmas $\neg\mathfrak{N} \Rightarrow \neg\mathfrak{S}$ *apgriezto teorēmu* (ilustrāciju skatīt 8.1. zīmējumā). Saskaņā ar kontrapozīcija likumu apgrieztās teorēmas pretējā teorēma (tāpat — pretējās apgrieztā teorēma) izteic to pašu, ko tiešā teorēma.

Saliktas teorēmas. Teorēmas reprezentāciju izskatā $\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}$ dažkārt var precizēt arī izteikumu loģikas ietvaros. Aplūkosim divus tipiskus gadījumus.

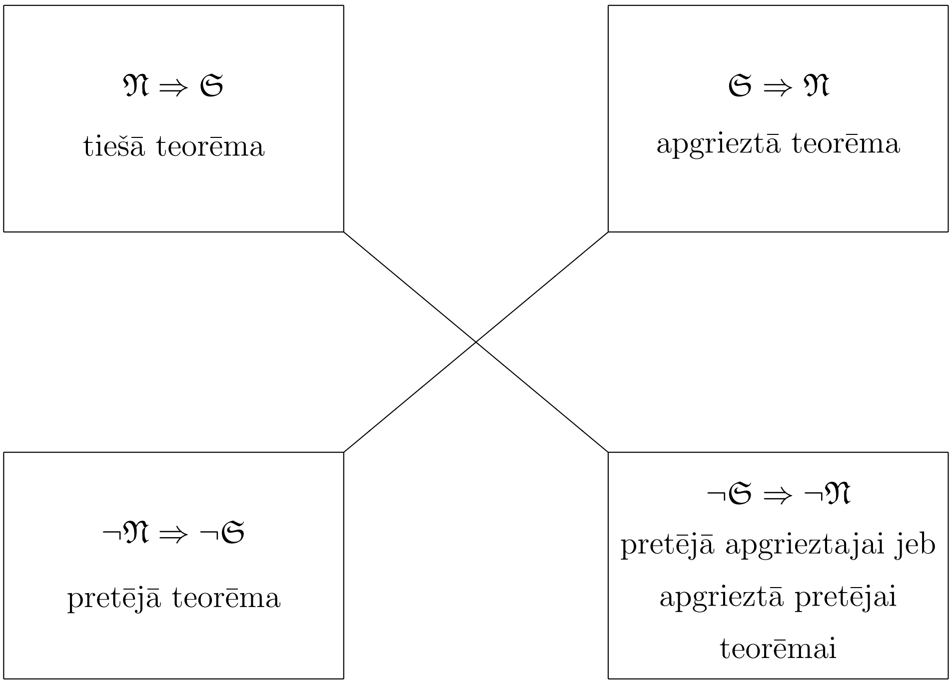
(i) Ja teorēmai ir izskats

$$\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}_1 \wedge \mathfrak{S}_2 ,$$

tad to var pierādīt, izvedot implikācijas

$$\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}_1 \qquad \text{un} \qquad \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}_2 .$$

Šī paņēmiena pamatojums ir tautoloģija 6.4. Vingrinājums (viii).



8.1. zīm.: Teorēmu klasifikācija.

(ii) Ja teorēmai ir izskats

$$\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \Rightarrow \mathfrak{S}\,,$$

tad to var pierādīt, izvedot implikācijas

$$\mathfrak{N}_1 \Rightarrow \mathfrak{S} \qquad \text{un} \qquad \mathfrak{N}_2 \Rightarrow \mathfrak{S}\,.$$

Šī paņēmiena pamatojums ir tautoloģija 6.2. Piemērs (i).

Netiešie pierādījumi. *Netiešo* pierādījumu jeb *pierādījumu no pretējā* pamatā ir trešā izslēgtā likums (6.4. Vingrinājums (i)). Tā ir klasiskās izteikumu loģikas tēze, ka katrs izteikums ir vai nu patiess, vai aplams. Tā rezultātā, lai pierādītu, ka izteikums $\mathfrak{A}$ ir patiess, pietiek pierādīt, ka tas nav aplams. Tātad, ja mums jāpierāda kāda teorēma

$$\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}\,,$$

mēs varam mēģināt pierādīt, ka apgalvojums

$$\neg(\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S})$$

ir aplams jeb ekvivalentā formā

$$\mathfrak{N} \wedge \neg\mathfrak{S} \sim a\,.$$

Ņemot vērā implikācijas definīciju, parasti izvēlas kādu izteikumu $\mathfrak{A}$, un pierāda, ka

$$\mathfrak{N} \wedge \neg\mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{A} \sim p\,.$$

Pievērsīsimies konkrētam pierādījumam.

8.16. Apgalvojums. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\square$ Pieņemsim pretējo, proti, ka $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ja reiz tā, tad $\sqrt{2}$ var uzrakstīt kā nesaīsināmu daļu $\frac{m}{n}$, kur gan $m \in \mathbb{N}$, gan $n \in \mathbb{N}$. No šejienes $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, tāpēc $2 = \frac{m^2}{n^2}$ jeb $2n^2 = m^2$, t.i., m^2 ir pāra skaitlis.

Ja m ir nepāra skaitlis, t.i., $m = 2s + 1$, tad $m^2 = 4s^2 + 4s + 1$ arī ir nepāra skaitlis. Tāpēc, lai m^2 būtu pāra skaitlis, arī m ir jābūt pāra skaitlim. Pieņemsim, ka $m = 2k$. Iegūstam $2n^2 = m^2 = 4k^2$ jeb $n^2 = 2k^2$. Līdzīgi kā iepriekš secinām, ka n nav nepāra skaitlis. Tātad $n = 2t$, t.i., n ir pāra skaitlis. Līdz ar to gan m, gan n ir pāra skaitļi, bet mēs taču pieņēmām, ka daļa $\frac{m}{n}$ nav saīsināma. Tā kā mūsu spriedumos kļūdu nav, tad atliek tikai viena iespēja, proti, pieņēmums, ka $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ir kļūdains. $\blacksquare$

Šai pierādījumā izteikuma $\mathfrak{A}$ lomā ir fakts, ka katru racionālu skaitli var reprezentēt kā nesaīsināmu daļu.

Pierādījums pa gadījumiem. Dažkārt izrādās parocīgi vispārīgo spriedumu sadalīt atsevišķās objektu klasēs tā, lai to apvienojums dotu visus apskatāmos objektus.

8.17. Apgalvojums. *Eksistē tādi divi iracionāli skaitļi a un b, ka a^b ir racionāls skaitlis.*

$\square$ Izvēlamies skaitli $b \leftleftharpoons \sqrt{2}$. Tālākais pierādījums sazarojas.

(i) Izvēlamies $a \leftleftharpoons \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, ja $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ir iracionāls skaitlis. Tā rezultātā

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2\,,$$

kas ir racionāls skaitlis.

(ii) Ja nu tomēr $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ir racionāls skaitlis, tad izvēlamies $a \leftleftharpoons \sqrt{2}$. $\blacksquare$

Jautājums:

— Kāds ir skaitlis a?

Apgalvojuma pierādījums nedod nekādu informāciju par patieso skaitļa a vērtību. Šī iemesla dēļ konstruktīvajā matemātikā šāda tipa pierādījumus neatzīst par pieņemamiem. No klasiskās matemātiskās loģikas viedokļa pierādījums ir korekts.