Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātiskās analīzes katedra

Jānis Buls

MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS UN KOPU TEORIJAS ELEMENTI

Pārskats

2008

MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS UN KOPU TEORIJAS ELEMENTI

Preambula

Citu matemātikas disciplīnu vajadzības ir noteicošais arguments, kāpēc matemātiskās loģikas un kopu teorijas pamatkurss sākas ar tādām tēmām, kā: kopa, operācijas ar kopām, kopu Dekarta reizinājums, funkcija; matemātiskā indukcija un Ņūtona binoma formula. Šai izklāsta stadijā lektoram nākas operēt ar matemātiskās loģikas elementiem neformālā izpratnē. Taču jau lekciju kursa sākumā lietderīgi uzsvērt, ka mūsdienu matemātika stingri norobežo skaidrojumu no definīcijas, kā arī objekta definīciju no tā uzdošanas veida.

Tālākais izklāsts lielā mērā ir tradicionāls, proti, izteikumu un predikātu loģika, tās lietojumi kopu teorijas formulu pierādījumos. Tā kā predikātu loģika netiek izklāstīta kā aksiomātiska teorija, tad formulu pierādījumi tiek aplūkoti tikai galīgās kopās. Šī nostāja vēl jo vairāk ir attaisnojama ievadkursā, jo pilnīgāk atklāj sakarus ar izteikumu loģiku.

Kursa apraksts — plāns

1. Pamatjēdzieni un atvasināti jēdzieni. Kopas jēdziens, kopas apakškopa, vienādas kopas. Kopu uzdošanas veidi: pārskaitījums, elementa raksturīgā īpašība. Kopu apvienojums, šķēlums, starpība. Venna diagrammas. (1 st. l., 1 st. pr. d.)

Kopas un tajā definētas funkcijas — lūk, divi objektu tipi, ar kuru izpēti galu galā nodarbojas katra matemātikas nozare. Jēdziens "kopa" intuitīvi viegli uztverams, īpaši, ja nemēģina "mānīties" un tā arī tieši pasaka, ka tas ir pamatjēdziens. Taču, lai varētu sniegt pilnvērtīgu kopas jēdziena skaidrojumu, jāievieš vēl viens pamatjēdziens, proti, attiecība — elements x pieder kopai X. Tā rezultātā vajadzīgs arī jēdziena "elements" skaidrojums. Jāpasvītro, ka arī kopas var būt kādas citas kopas elementi. Šai izklāsta stadijā jēdziens "attiecība" tiek lietots intuitīvā izpratnē, un netiek detalizēti skaidrots (ja vien auditorijā neizraisās diskusija par šo tēmu). Tas pats attiecas uz galīgas un bezgalīgas kopas jēdzieniem.

Tai pašā laikā: apakškopa, virskopa, īsta apakškopa, tukša kopa, vienādas kopas, kopu apvienojums, šķēlums, starpība, papildinājums — jau ir atvasināmi jēdzieni, kaut arī matemātiskās loģikas simboliku šai stadijā lietojam intuitīvā nozīmē.

Kopas uzdošas veidi

- Uzdod kopas A elementu sarakstu. Tā pierakstu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ parasti saprot kā apgalvojumu:
  kopa A sastāv no elementiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

- Uzdod kopas B elementus raksturojošo predikātu.
  Tā pierakstu $B = \{x | P(x)\}$
  parasti saprot kā apgalvojumu: kopa B sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuriem piemīt īpašība P.

Ar pirmo paņēmienu samērā ērti uzdodamas galīgas kopas.
Ar otro — bezgalīgas kopas.

Taču pirmajā gadījumā saraksts parasti būs pārskatāms tikai tad, ja elementu skaits nav pārāk liels.

Otrajā gadījumā jābūt uzmanīgam, lai nerastos pretrunas, piemēram, tā sauktais Rasela paradokss. Šai izklāsta stadijā nav lietderīgi auditoriju iepazīstināt ar Rasela paradoksu.

Jāpasvītro, ka Venna diagrammu metode lietojama bez iebildēm tikai gadījumā, ja formula satur ne vairāk kā trīs kopas.

2. Korteža jēdziens, Dekarta reizinājums. Funkcijas (attēlojuma) definīcija, funkcijas uzdošanas veidi. Attēlojumu veidi. Inversais attēlojums. Algebriska operācija. (1 st. l., 1 st. pr. d.)

Kopu $\{\,\{x\},\ \{x, y\}\,\}$ sauc par elementu $x \in X$, $y \in Y$ *sakārtotu pāri* un apzīmē (x, y).

Pieraksts (x, y) tiešā veidā norāda, ka x ir pāra pirmais elements, bet y — otrais. Tā rezultātā pāris (x, y) ir vienāds ar pāri (a, b) tad un tikai tad, ja $x = a$ un $y = b$.

Pāri $((x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$, kur $\forall i \in \overline{1, n}$ $(x_i \in A_i)$, sauc par n – dimensionālu kortežu pār kopām A_1, A_2,...,A_n un lieto apzīmējumu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Tā kā induktīvas definīcijas ir matemātikas ikdiena, tad korteža induktīva definīcija ir vēl viena ilustrācija šāda veida definīcijām.

Visu sakārtoto pāru (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, kopu sauc par kopu X un Y Dekarta reizinājumu un apzīmē $X \times Y$. Tātad

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Par kopu A_1, A_2,...,A_n Dekarta reizinājumu $A_1 \times A_2 \times .... \times A_n$ sauc visu n – dimensionālu kortežu kopu pār kopām A_1, A_2,...,A_n, t.i.,

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, \forall i \in \overline{1, n}\, (x_i \in A_i)\}.$$

Ja $A = A_1 = A_2 = ... = A_n$, tad lieto apzīmējumu $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \rightleftharpoons A^n$.

Trijnieku $f = (X, Y, F)$, kur $F \subseteq X \times Y$, sauc par *attēlojumu* jeb *funkciju*, ja visiem kopas F elementiem $(x, y), (x, z)$ ir spēkā vienādība $y = z$. Kopu X sauc par attēlojuma f *starta* jeb *izejas* kopu, Y — par *finiša* jeb *ieejas* kopu, F sauc par *grafiku*. Ja $(x, y) \in F$, tad lieto pierakstu $f(x) = y$ jeb $f : x \mapsto y$. Šajā situācijā saka arī, ka elementa x *attēls* ir elements y, bet elementa y *pirmtēls* ir elements x. Vispārīgs pieraksts $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ (lieto arī pierakstu $X \xrightarrow{f} Y$) norāda, ka f ir attēlojums ar starta kopu X un finiša kopu Y. Elementu $x \in X$ sauc par funkcijas f *argumentu* vai *neatkarīgo mainīgo*, bet $y \in Y$ — par *atkarīgo mainīgo*. Ja $X = Y$, tad saka, ka funkcija f attēlo kopu X sevī. Kopu

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \,|\, \exists y \in Y\ (f : x \mapsto y)\}$$

sauc par attēlojuma $f : X \multimap\!\!\rightarrow Y$ *definīcijas apgabalu* (angliski *"domain"*). Savukārt kopu

$$\mathrm{Ran}(f) = \{y \,|\, \exists x \in X\ (f : x \mapsto y)\}$$

sauc par attēlojuma f *vērtību apgabalu* (angliski *"range"*) .

Funkcijas uzdošanas veidi: aprakstošais (atbilstības likumu izsaka ar vārdiem); grafiskais (uzdod funkcijas grafiku: uzskaita visus pārus, tabulārais, ar zīmējumu), analītiskais (parasti ar formulas vai procedūras palīdzību).

Jāpasvītro, ka šī klasifikācija ir nosacīta, tā piemēram, analītisko funkcijas uzdošanas veidu ļoti bieži var arī uzskatīt par aprakstošo funkcijas uzdošanas veidu.

Attēlojumu veidi: injekcija, sirjekcija, visur definēts attēlojums, bijekcija. Attēlojumu $f : X \multimap\!\!\to Y$ sauc par *visur definētu attēlojumu*, ja $\mathrm{Dom}(f) = X$. Šai gadījumā mēdz lietot vienu no apzīmējumiem $f : X \to Y$ vai $X \xrightarrow{f} Y$.

Pieņemsim, ka F ir funkcijas $f : X \multimap\!\!\to Y$ grafiks, tad $F^{-1} \leftharpoondown \{ (y,x) \mid (x,y) \in F \}$. Trijnieku $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$ sauc par funkcijas $f : X \multimap\!\!\to Y$ inverso funkciju, ja f^{-1} ir funkcija.

Tradicionāli visur definētu attēlojumu $f : X^n \to X$ sauc par algebrisku n–vietīgu operāciju, taču šis termins mūsdienās tiek lietots arī vispārīgākās situācijās. Tā rezultātā atšķirība starp attēlojumu un algebrisku operāciju ir nosacīta un bieži saistīta ar attiecīgās matemātikas nozares tradīcijām.

3. Matemātiskās indukcijas metode. Kopas uzdošana ar induktīvu konstrukciju. Ņūtona binoma formula. (2 st. l.)

Matemātiskās indukcijas shēma vienkāršākajā izskatā

$$\frac{P(0), \quad \forall x \in \mathbb{N}\ (P(x) \Rightarrow P(x+1))}{\forall x \in \mathbb{N}\ P(x)}$$

Kas attiecas uz induktīvu kopas konstrukciju, tad vispārīgā gadījumā tā ir kopas definīcija, kas izmanto vispārināto indukcijas metodi. Vienkāršākajā gadījumā tas nozīmē, ka jāuzdod kopa $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, kur kopas A elementus definē izmantojot shēmu:

$$\begin{aligned} a_0 &= e; \\ a_{n+1} &= \mathfrak{f}(a_n). \end{aligned}$$

Te $\mathfrak{f}$ ir kāda fiksēta procedūra (algoritms). Jēdzienu algoritms mūsdienu matemātikā definē, taču šī kursa ietvaros šis jēdziens tiek izmantots intuitīvā nozīmē.

Ņūtona binoma formulas pierādīšanai izmantojama rekurences sakarība

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

kur $k < n$.

4. Matemātiskās loģikas priekšmets. Izteikumi, to patiesumvērtības. Vienkārši un salikti izteikumi. Loģiskās operācijas, to definīcijas ar patiesumvērtību tabulām. (2 st. l.)

Matemātisko loģiku var uzskatīt par formālo loģiku, kas lieto matemātiskas metodes un matemātiska tipa simboliku. Lai arī cik vilinoši neliktos siloģismi, tomēr tas nav mūsdienu matemātiskās loģikas maģistrālais virziens. Taču izšķirošais ir laika deficīts. Kursa apjoms ir tikai 2 kredītpunkti. Tas nenozīmē, ka tos nevajadzētu lietot kā ilustratīvu materiālu.

Izteikuma jēdziens ir pamatjēdziens un netiek definēts. Aprakstoši paskaidrojot, var teikt, ka par izteikumu saucam tādu apgalvojumu, kas ir vai nu *patiess*, vai *aplams*. Tā rezultātā parādās arī *patiesumvērtības* jēdziens, kas arī ir pamatjēdziens.

Vienkārša un salikta izteikuma jēdzieni ir sintaktiskas dabas jēdzieni, bet tā kā šai ievadkursā sistemātiski netiek analizētas formālas valodas, tad šos jēdzienus nākas uzskatīt par pamatjēdzieniem, un aprobežoties ar skaidrojumu.

Tradicionāli biežāk lietotās patiesuma operācijas ir: negācija, disjunkcija, konjunkcija, implikācija un ekvivalence. Pašas definīcijas nesagādā principiāla rakstura problēmas, tomēr diskutējams ir jautājums par šo operāciju atbilstību "pareizai" spriešanai.

A	$\neg A$
a	p
p	a

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
a	a	a	a	p	p
a	p	a	p	p	a
p	a	a	p	a	a
p	p	p	p	p	p

5. Formulas, to patiesumvērtību tabulas. (1 st. l., 1 st. pr. d.)

Formulas definīcija.

(i) Pieņemsim, ka izteikumi apzīmēti ar burtiem $A, B, C, \ldots$ tad katru no burtiem $A, B, C, \ldots$ sauc par formulu;

(ii) ja $\mathfrak{A}$ ir formula, tad $\neg\mathfrak{A}$ sauc par formulu;

(iii) ja $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{B}$ ir formulas, tad $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$ sauc par formulām.

Formulā ieejošos burtus sauc par *formulas argumentiem.*

Tabulu, kuras rindiņas atbilst visām iespējamām formulas argumentu patiesuma vērtību kombinācijām un kas uzrāda atbilstošo formulas patiesuma vērtību, sauc par *formulas patiesuma vērtību tabulu* jeb *formulas tabulu.* Rindiņas tabulā parasti izkārto *leksikogrāfiski.* Tas nozīmē, ka tos formālos vārdus alfabētā $\{a, p\}$, kuri sastāda argumentu vērtību kombinācijas, sakārto tādā secībā, kādā tie būtu uzrādīti vārdnīcā, ievērojot, ka burts a alfabētā atrodas pirms burta p.

6. Identiski patiesas (tautoloģijas), identiski aplamas, neitrālas, izpildāmas un atspēkojamas formulas. Formulu ekvivalence. Loģisko operāciju savstarpējā atkarība. (1 st. l., 2 st. pr. d.)

Formulas $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{B}$ sauc par ekvivalentām, ja formula $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ ir tautoloģija.

Tā kā formula $A \Rightarrow B$ ir ekvivalenta formulai $\neg A \vee B$ un formula $\neg A \vee B$ satur tikai loģiskās operācijas $\neg$ un $\vee$, tad mēs sakām, ka loģiskā operācija $\Rightarrow$ izsakāma ar loģiskajām operācijām $\neg$ un $\vee$. Tagad mēs varam arī pasniegt definīciju.

7. Normālforma, tās atrašana, izcila normālforma. (1 st. l., 2 st. pr. d.)

Disjunktīva un izcila disjunktīva normālforma. Konjunktīva un izcila konjunktīva normālforma.

8. Konsekventi un implikanti. Teorēmu loģiskā struktūra, netiešie pierādījumi. (1 st. l., 1 st. pr. d.)

Formulu $\mathfrak{K}$ sauc par formulas $\mathfrak{F}$ *konsekventu*, ja $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{K}$ ir tautoloģija.

Formulu $\mathfrak{I}$ sauc par formulas $\mathfrak{F}$ *implikantu*, ja $\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{F}$ ir tautoloģija.

Par teorēmām parasti mēdz saukt patiesus un pierādāmus apgalvojumus. Visbiežāk teorēma no loģiskās struktūras viedokļa ir implikācija $\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}$. $\mathfrak{N}$ sauc par *teorēmas nosacījumu*, $\mathfrak{S}$ — par *teorēmas secinājumu.* Ja patiesa implikācija $\mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{S}$, tad $\mathfrak{N}$ sauc par *pietiekamu* nosacījumu priekš $\mathfrak{S}$. Ja patiesa implikācija $\mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{N}$, tad $\mathfrak{N}$ sauc par *nepieciešamu* nosacījumu priekš $\mathfrak{S}$.

9. Izteikumformas, predikāti un indivīdi. Kvantori, saistīti un brīvi mainīgie. Identiski patiesas formulas. (2 st. l.)

Izteikumforma ir pamatjēdziens un netiek definēts. Tas pats attiecas uz predikātu un indivīdu. Aprakstoši paskaidrojot, var teikt, ka predikāts ir tas, kas paliek pāri, kad izteikumformā izdzēš visus mainīgos (indivīdus).

10. Konkrēti predikāti galīgās kopās. Predikātu loģika un izteikumu loģika. (2 st. l.)

Konjunkcija ir patiesa tad un tikai tad, ja patiess katrs tās loceklis. No otras puses, $\forall x P(x)$ ir patiess apgalvojums tad un tikai tad, ja $P(a_i)$ ir patiess katram indivīdu kopas elementam a_i. Tātad, ja indivīdu kopa ir galīga, piemēram, tā ir vienāda ar kopu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tad formulas

$$\forall x P(x) \qquad \text{un} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} P(a_i)$$

ir ekvivalentas.

Līdzīgi, disjunkcija ir patiesa tad un tikai tad, ja patiess ir kaut viens tās loceklis. No otras puses, $\exists x P(x)$ ir patiess apgalvojums tad un tikai tad, ja $P(a_i)$ ir patiess kaut vienam indivīdu kopas elementam a_i. Tātad formulas

$$\exists x P(x) \qquad \text{un} \qquad \bigvee_{i=1}^{n} P(a_i)$$

ir ekvivalentas.

11. Identiskā patiesuma pierādīšana un atspēkošana galīgās kopās. Kvantoru īpašības. (1 st. l., 2 st. pr. d.)

Relatīvi vienkārši var pierādīt, ka jebkurā galīgā indivīdu kopā formulas

$$\neg\forall x\ P(x) \ \Leftrightarrow\ \exists x\ \neg P(x),$$
$$\neg\exists x\ P(x) \ \Leftrightarrow\ \forall x\ \neg P(x)$$

ir identiski patiesas. Tāpat vienkārši var konstatēt, ka formulas

$$\forall x \exists y\ P(x,y) \qquad \text{un} \qquad \exists y \forall x\ P(x,y)$$

nav ekvivalentas gan ar redukciju uz izteikumu loģiku, gan piemeklējot konkrētu pretpiemēru.

12. Aksiomas, aksiomātiska teorija. Izveduma likumi. Klasiskās predikātu loģikas aksiomas. (1 st. l.)

Nav pamata bažām, ka predikātu loģikas aksiomātika ir pārāk sarežģīta, lai ar to iepazīstinātu matemātikas (uzsveru *matemātikas*) studiju programmu klausītājus. Te tā ir.

Predikātu loģikas aksiomātika.
(i) Visas tautoloģijas,
(ii) visas vienādības aksiomas,
(iii) visas formulas izskatā:

- $\forall x \mathfrak{A}(x) \Rightarrow \mathfrak{A}(t)$,
- $\mathfrak{A}(t) \Rightarrow \exists x \mathfrak{A}(x)$.

Izveduma likumi.
(i) Modus ponens: $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$
(ii) Vispārinājuma kārtulas (formula $\mathfrak{A}$ mainīgo x nesatur brīvi):

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(x)}{\mathfrak{A} \Rightarrow \forall y \mathfrak{B}(y)}, \qquad \frac{\mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathfrak{A}}{\exists y \mathfrak{B}(y) \Rightarrow \mathfrak{A}}$$

13. Kopu teorija un loģika. Kopu vienādība, tās pierādīšana. (1 st. l., 1 st. pr. d.)

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B, \qquad (x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Šīs ir tās pamatekvivalences, kas ļauj kopu vienādību pierādījumus reducēt uz ekvivalences pierādījumiem izteikumu rēķinos.

14. Priekšsakārtojums, sakārtojums. Kopas sadalījums, ekvivalences tipa predikāts. Faktorkopa. (2 st. l.)

Pieņemsim, ka P ir kopā K definēta divvietīga attiecība. P sauc par:
(i) *refleksīvu*, ja $P(x, x) \sim p$;
(ii) *simetrisku*, ja $P(x, y) \sim p \Rightarrow P(y, x) \sim p$;
(iii) *antisimetrisku*, ja $P(x, y) \sim p \wedge P(y, x) \sim p \Rightarrow x = y$;
(iv) *transitīvu*, ja $P(x, y) \sim p \wedge P(y, z) \sim p \Rightarrow P(x, z) \sim p$.

15. Kopas apjoms. Sanumurējamas un nesanumurējamas kopas. Par kopu teorijas paradoksiem. (2 st. l.)

Saka, ka divas galīgas kopas ir vienlielas, ja tām ir vienāds elementu skaits.

Saka, ka divām kopām K_1 un K_2 ir vienāds apjoms, ja eksistē bijekcija $\beta : K_1 \to K_2$. Šī definīcija ir visaptveroša tai nozīmē, ka var parādīt, ka divas galīgas kopas ir vienlielas tad un tikai tad, ja tām ir vienāds apjoms.

Kas attiecas uz Kantora diagonalizācijas principu, tad visuzskatāmāk to var demonstrēt aplūkojot tā sauktos ω–vārdus alfabētā $\{0, 1\}$. Taču, ja lektoram tas liekas apgrūtinoši, var pieturēties pie klasikas.

Rasela paradokss, ja to akurāti izklāsta, ir pietiekoši uzskatāms.

- Pieņemsim, ka $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{K} | \mathfrak{K} \notin \mathfrak{K}\}$, kur $\mathfrak{K}$ — patvaļīgas kopas.
- Vai $\mathfrak{R}$ ir kopa?
- Ja ir, tad varam uzdot jautājumu:
  — Vai $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$?
- Izanalizēsim abas iespējas.

1. Ja $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$, tad saskaņā ar kopas $\mathfrak{R}$ definīciju tas nozīmē, ka $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$. Pretruna!
2. Ja $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$, tad saskaņā ar kopas $\mathfrak{R}$ definīciju tas nozīmē, ka $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$. Atkal pretruna!