Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātiskās analīzes katedra

Jānis Buls

MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS UN KOPU TEORIJAS ELEMENTI

II daļa

Lekciju konspekts — 2008

SATURS

Apzīmējumi 4

Predikāti un indivīdi 6

Izteikumformas (6). Predikāti un indivīdi (7).
Konstantes, parametri un mainīgie (9). Eksistences
kvantors (9). Universālkvantors (11). Formulas (12).
Saistīti un brīvi mainīgie (15). Klasiskā interpretācija (17).

Predikātu loģika un izteikumu loģika 20

Konkrēti predikāti (20) Predikāti galīgās kopās (21).
Kvantori galīgās kopās (22). Substitūcijas (24).

Galīgi identiskas formulas 26

Formulas kanoniskais attēls (26). Galīgi identiskas formulas (28).
Galīgā identiskuma pierādīšana (30). Galīgā identiskuma
atspēkošana (31). Kvantoru komutācija (32).
Kvantoru distributivitāte (33). Nepilnības (33).

Aksiomātiska teorija 35

Aksiomātiska metode (35). Aksiomas (35).
Izveduma likumi (37).

Kopu teorija un loģika 40

Kopu apvienojums (40). Kopu šķēlums (41).
Kopu starpība (42). Dekarta reizinājums (42).

Sakārtojums 44

Priekšsakārtojums (44). Sakārtojums (45).
Kopas sadalījums (46). Ekvivalences tipa predikāts (47).
Izvēles aksioma (49). Faktorkopa (50). Attēlojuma kodols (52).

Kopas apjoms 54

Kopas apjoms (54). Galīgas kopas (56).

Sanumurējamas kopas (57). Kontinuums (58).
Rasela paradokss (59).

Bibliogrāfija 61

APZĪMĒJUMI

$\neg$ — negācija,
$\vee$ — disjunkcija, $\wedge$ — konjunkcija,
$\Rightarrow$ — implikācija, $\Leftrightarrow$ — ekvivalence,
$\exists$ — eksistences kvantors, $\forall$ — universālkvantors,
$x \in X$ — elements x pieder kopai X jeb x ir kopas X elements,
$A \subseteq B$ — kopa A ir kopas B apakškopa,
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ — kopu A un B apvienojums, šķēlums, starpība,
$\leftrightharpoons$, $\rightleftharpoons$ — vienādības saskaņā ar definīciju,
$\overline{1,n} \leftrightharpoons \{1, 2, \ldots, n\}$; $\overline{k,n} \leftrightharpoons \{k, k+1, \ldots, n\}$, te $k \leq n$,
$\mathbb{Z}$ — veselo skaitļu kopa, $\mathbb{Z}_+ \leftrightharpoons \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$, $\mathbb{N} \leftrightharpoons \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$,
$\mathbb{Q}$ — racionālo skaitļu kopa,
$\mathbb{R}$ — reālo skaitļu kopa, $\mathbb{C}$ — komplekso skaitļu kopa,
$\aleph_0$ — kopas $\mathbb{N}$ apjoms, $\mathfrak{c}$ — reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apjoms,
$\langle x, y \rangle \leftrightharpoons (x, y) \leftrightharpoons \{\{x\}, \{x, y\}\}$,
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightharpoons ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$,
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftrightharpoons \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \overline{1,n}\ (x_i \in A_i)\}$, A^n,
$f : x \mapsto y$, $f : X \multimap Y$, $X \overset{f}{\multimap} Y$,
$\mathrm{Dom}(f) \leftrightharpoons \{x \mid \exists y \in Y\ (f : x \mapsto y)\}$, $\mathrm{Ran}(f) \leftrightharpoons \{y \mid \exists x \in X\ (f : x \mapsto y)\}$,
$f : X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$, $f : X \twoheadrightarrow Y$, $f : X \hookrightarrow Y$

$\square$ — pierādījuma sākums,
$\blacksquare$ — pierādījuma beigas;
$\Rightarrow$ — implikācijas zīmi pierādījuma sākumā mēs izmantojam, lai norādītu, ka tagad sākas teorēmas nepieciešamā nosacījuma pierādījums,
$\Leftarrow$ — šo zīmi pierādījumos mēs izmantojam, lai norādītu, ka tagad sākas teorēmas pietiekamā nosacījuma pierādījums,

$\overset{A14.4.2}{=}$ — šo apzīmējumu pierādījumos mēs izmantojam, lai norādītu, ka vienādības pamatotība balstās uz apgalvojumu 14.4.2 (saprotams, ka apgalvojuma 14.4.2 vietā var būt jebkurš cits apgalvojums, teorēma, lemma, formula, utm.).

9. nodaļa

PREDIKĀTI UN INDIVĪDI

Izteikumformas, predikāti un indivīdi. Kvantori, saistīti un brīvi mainīgie. Identiski patiesas formulas.

9.1. Izteikumformas

Izteikumu loģika aplūko apgalvojumus kā nedalāmas pamatvienības. Izteikumu loģikai nav svarīgs ne tas, kas tiek apgalvots, ne arī tas, par ko apgalvojums izteikts. Ievērota tiek tikai apgalvojuma patiesuma vērtība.

Predikātu loģikā apskata ne vien izteikumus, bet arī *izteikumformas* — izteiksmes (apgalvojumus), kas satur mainīgos un pārvēršas par izteikumiem, kad fiksē mainīgo vērtības. Izteikumforma ir sākotnējais jēdziens jeb pamatjēdziens un tāpēc netiek definēta. Tas pats attiecas uz predikātu un indivīdu.

Detalizētāku skaidrojumu sāksim ar piemēru. Teikums

- Skaitlis 6 ir lielāks par skaitli 4.

ir izteikums, taču teikums

- Skaitlis x ir lielāks par skaitli 4.

nav izteikums, jo šī teikuma patiesums atkarīgs no skaitļa x vērtības. Šis pēdējais teikums ir izteikumforma. Svarīgi ir, ka aizvietojot mainīgo x ar konkrētu skaitli a, šis teikums pārvēršas par izteikumu. Tā, piemēram, ja skaitlis $a = 2$, tad iegūstam aplamu izteikumu, ja $a = 7$, tad — patiesu izteikumu.

Vēl daži izteikumformu piemēri:

- $x^2 + y^2 = 0$.
- Taisne MN ir paralēla taisnei PQ.
- X ir Latvijas galvaspilsēta.

Rezumējot var teikt, ka par

> izteikumformu sauc tādu izteiksmi (apgalvojumu), kas satur vienu vai vairākus *brīvus mainīgos* un kas pārvēršas par aplamu vai patiesu izteikumu, ja šo mainīgo vietā liek konkrētas vērtības.

Atzīmēsim, ka šis rezumējums nav definīcija, bet tikai sākotnējā jēdziena skaidrojums, tāpēc nav pārāk jāsatraucas, ka mēs šobrīd nesniedzam skaidrojumu, kas tie tādi ir 'brīvi mainīgie'. Salīdzinājumam: apgalvojums

- Reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$ atrodama tāda mainīgā x vērtība, ka $\sin x = \frac{1}{2}$.

ir patiess izteikums un nav izteikumforma. Ievietojot te mainīgā x vietā, teiksim, skaitli 0, iegūstam absurdu teikuma sākumu. Tas liecina, ka šeit mainīgais x ir saistīts.

Vienādojumi, nevienādības ar nezināmajiem un to sistēmas ir plaši lietototas izteikumformas.

9.2. Predikāti un indivīdi

Vienkāršākajā situācijā individuāls izteikums saka, ka kādam priekšmetam piemīt kāda noteikta īpašība jeb pazīme.

- Ziemā zaķis Pelēcis ir balts.
- Rēzekne ietek Usmas ezerā.
- Funkcija $y = \sin x$ ir nepārtraukti diferencējama.

Atzīmēsim, ka izteikumā teiktais var arī neatbilst īstenībai.

Vispārīgi runājot, visi minētie piemēri iekļaujas shēmā

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ atrodas attiecībā P, ko ar simbolu palīdzību parasti pieraksta tā:

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Šis pieraksts atgādina veidu, kā pieraksta kādas funkcijas vērtību dotajā punktā — $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Šo pierakstu arī lasa līdzīgi:

— pē no ā viens, ā divi līdz ā en.

Šajā gadījumā P sauc par *predikātu*, bet $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — par *indivīdiem*.

Skaidrojuma līmenī var teikt, ka

♢ *individuāls izteikums* ir izteikums, kurā viens vai vairāki noteikti priekšmeti pakļauti kādam noteikumam;

♢ par individuāla izteikuma *subjektu* sauc šī izteikuma daļu, kura rāda, par kādu priekšmetu ir runa;

♢ par individuāla izteikuma *predikātu* sauc šī izteikuma daļu, kura rāda, kas par minēto priekšmetu vai priekšmetiem tiek apgalvots.

Piemērā

- Ziemā zaķis Pelēcis ir balts.

subjekts ir 'zaķis Pelēcis', bet predikāts ir 'Ziemā _____ ir balts'. Savukārt piemērā

- Rēzekne ietek Usmas ezerā.

subjekti ir veseli divi, proti, 'Rēzekne' un 'Usmas ezers'. Te predikāts ir '$\_\_\_\_\__1$ ietek $\_\_\_\_\__2$'.

Vērīgs lasītājs var pajautāt:

— Kāda ir atšķirība starp subjektu un indivīdu?

Subjekts ir individuāla izteikuma daļa. Tātad teikuma uzbūves raksturojums. Savukārt indivīds ir pats priekšmets (kādas domājamas kopas elements).

Ja mēs pievēršamies izteikumformām, tad aprakstoši paskaidrojot var teikt, ka predikāts ir tas, kas paliek pāri, kad izteikumformā izdzēš visus mainīgos. Faktiski pierakstu '$\_\_\_\_\__1$ ietek $\_\_\_\_\__2$' var interpretēt arī kā izteikumformu, tikai te izteikumformas

- x ietek y .

vietā lietots pieraksts

- $\_\_\_\_\__1$ ietek $\_\_\_\_\__2$.

9.3. Konstantes, parametri un mainīgie

Jau no skolas kursa lasītājam ir pazīstams šāds kvadrātvienādojuma pieraksts:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Šaja piemērā redzamas

- divas konstantes: 2 un 0;
- trīs parametri: a, b un c;
- viens mainīgais: x.

♢ Konstante ir simbols, kas izmantots kāda fiksēta priekšmeta apzīmēšanai.

♢ Parametrs ir simbols, kam nav vispārpieņemtas vienas vērtības, bet kam kāda noteikta vērtība tiek domāta fiksētā kontekstā. Tātad parametrus noteiktā kontekstā var uzlūkot par konstantēm, bet citā kontekstā tas pats parametrs var būt konstante ar citu vērtību.

♢ Mainīgais ir simbols, kas pat fiksētā kontekstā paliek nenoteikts — spēj pieņemt dažādas vētības no kādas priekšmetu kopas.

Teoriju būvējot formāli visi šie jēdzieni reducējas uz dažādām fiksēta alfabēta apakškopām. Mēs ar to jau saskārāmies definējot, kas ir formula izteikumu loģikā. Semantikā visi šie ir sākotnējie jēdzieni.

9.4. Eksistences kvantors

Ne retāk kā ikdienas dzīvē, arī matemātikā jārunā par aplūkoto vai pieminēto priekšmetu skaitu. Ļoti bieži sastopami tamlīdzigi izteikumi, kā "visām riņķa līnijām piemīt īpašība ..." vai "eksistē vismaz viens naturāls skaitlis, kuram ..." Matemātiskā loģika parāda, ka visus tos var reducēt uz diviem galējiem daudzuma novērtējumiem, kurus izsaka tā saucamie kvantori.

Pierakstu $\exists x\, P(x)$ lasa "eksistē tāds indivīds x, kuram $P(x)$" vai arī "eksistē vismaz viens x, kuram izpildās predikāts $P(x)$", vai arī "vismaz vienam x piemīt īpašība P". Parasti gan to lasa īsi un burtiski:

— Eksistē tāds iks, ka pē no iks.

Nevajadzētu domāt, ka vārds 'eksistē' ir vienīgais, kā izteikt eksistēšanas ideju. Dažādībai var lietot tādas kvantorfrāzes kā: 'vismaz viens', 'kāds', 'kaut viens', 'daži', 'var atrast', 'ir tādi'.

loģikā 'daži' tiek saprasts kā 'vismaz viens'.

9.4.1. Definīcija. *Simbolu $\exists$ sauc par eksistences kvantoru, $\exists x$ sauc par eksistences kvantora kompleksu.*

Jāpasvītro, ka eksistences kvantors neapgalvo tieši viena objekta eksistenci, bet gan vismaz viena objekta eksistenci ar uzrādīto īpašību. Lai izsacītu to, ka eksistē tieši viens objekts jālieto garāka formula.

Tagad pievērsīsimies piemēriem. Kā simboliski pierakstīt apgalvojumu:

- Eksistē reāls skaitlis, kas lielāks par skaitli 7.

Priekšmetu joma te, kā redzam, ir visi reālie skaitļi. Dažiem predikātiem matemātikā jau iesakņojušies savi specifiski apzīmējumi. Tā rezultātā šis izteikums iegūst izskatu:

$$\exists x\ (x > 7 \wedge x \in \mathbb{R})$$

Burts x nebūt nav vienīgais, kuru mēdz lietot kā mainīgo. Tikpat labi šo apgalvojumu simboliski var pierakstīt izmantojot burtu y:

$$\exists y\ (y > 7 \wedge y \in \mathbb{R})$$

Līdz ar to konstatējam, ka

formulas $\exists x\ P(x)$ un $\exists y\ P(y)$ nozīmē vienu un to pašu.

Nedaudz sarežģītāks ir sekojošais piemērs.

- Intervālā $]2;7[$ ir kāds pārskaitlis.

Simboliski šo apgalvojumu var pierakstīt šādi:

$$\exists xy\ (x = 2y \wedge x \in]2;7[\wedge x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N})$$

Vienošanās. Mēs formulu $\exists xy\ P(x, y)$ uzskatam par formulas $\exists x\, \exists y\ P(x, y)$ saīsinātu pierakstu.

9.5. Universālkvantors

Pierakstu $\forall x\, P(x)$ lasa "visiem x izpildās P", vai "visiem x piemīt īpašība P". Parasti gan to lasa īsi un burtiski:

— Visiem iks pē no iks.

Vispārības ideju tikpat labi var izteikt arī ar vārdiem 'katram', 'jebkuram', 'vienalga kādam', 'ikvienam'.

9.5.1. Definīcija. *Simbolu $\forall$ sauc par universālkvantoru, $\forall x$ sauc par universālkvantora kompleksu.*

Tagad pievērsīsimies piemēriem. Kā simboliski pierakstīt apgalvojumu:

- Visi racionālie skaitļi ir reāli skaitļi.

Kā jau iepriekš atzīmējām, dažiem predikātiem matemātikā jau iesakņojušies savi specifiski apzīmējumi. Tā rezultātā šis izteikums iegūst izskatu:

$$\forall x\ (x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R})$$

Tikpat labi šo apgalvojumu simboliski var pierakstīt izmantojot burtu y:

$$\forall y\ (y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \in \mathbb{R})$$

Līdzīgi kā eksistences kvantora gadījumā konstatējam, ka

formulas $\forall x\ P(x)$ un $\forall y\ P(y)$ nozīmē vienu un to pašu.

Tagad pievērsīsimies nedaudz sarežģītākam piemēram:

- Daži gaiļi ir ātrāki par visiem tītariem.

Te mums nāksies pašiem ieviest konkrētus predikātus, lai varētu doto apgalvojumu pierakstīt simboliski. Pieņemsim, ka K ir visu putnu kopa, tad

- $G(x)$ nozīmē: x ir gailis,
- $T(x)$ nozīmē: x ir tītars,
- $A(x, y)$ nozīmē: putns x ir ātrāks par putnu y.

Tagad doto apgalvojumu var pierakstīt ar formulu

$$\exists x \, \big(G(x) \wedge \forall y \, \big(T(y) \Rightarrow A(x,y)\big)\big)$$

Vienošanās. Līdzīgi kā eksistences kvantora gadījumā formulu $\forall xy \; P(x,y)$ uzskatam par formulas $\forall x \, \forall y \; P(x,y)$ saīsinātu pierakstu.

Garāku formulu lietošana bieži ir neērta, tāpēc ievieš saīsinājumus. Piemēram, pierakstu

$$\forall x \in K \; P(x)$$

uzskata par saīsinājumu formulai

$$\forall x \; (x \in K \Rightarrow P(x)),$$

bet pierakstu

$$\exists x \in K \; P(x)$$

lieto kā saīsinājumu formulai

$$\exists x \; (x \in K \wedge P(x)).$$

Īpaši populārs ir formulas

$$\exists x \, P(x) \wedge \forall yz \, \big(\big(P(y) \wedge P(z)\big) \Rightarrow y = z\big)$$

saīsinājums $\exists! x \, P(x)$, kas izsakāms ar frāzi "eksistē tieši viens objekts x, kuram piemīt īpašība P".

9.6. Formulas

Mēs jau formulas jēdzienu lietojām iepriekš neformāli. Tagad šo jēdzīenu definēsim, taču vispirms mums nepieciešami daži sagatavošanās darbi līdzīgi kā tas bija izteikumu loģikas gadījumā.

9.6.1. Definīcija. *Alfabētu*

$$\mathcal{P} \leftharpoondown \{\Delta, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\} \cup \{\nabla, \Diamond, \Box, |, \exists, \forall\}$$

sauc par predikātu loģikas alfabētu.

Kā redzams $\mathcal{P} = \mathcal{I} \cup \{\nabla, \diamondsuit, \Box, |, \exists, \forall\}$, t.i., izteikumu loģikas alfabēts ir daļa no predikātu loģikas alfabēta. Mēs pārņemam arī izteikumu loģikas terminoloģiju.

Alfabēta $\mathcal{I}$ vārdu (Δ^n) sauc par *mainīgu izteikumu*, ja tikai $\Delta^n \neq \lambda$. Burtus $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sauc par *loģisko operāciju zīmēm*. Burts

$\neg$	apzīmē	negāciju,
$\wedge$	—	konjunkciju,
$\vee$	—	disjunkciju,
$\Rightarrow$	—	implikāciju,
$\Leftrightarrow$	—	ekvivalenci.

Burtus (,) sauc par *iekavām*, attiecīgi

(	sauc par	*kreiso iekavu*,
)	sauc par	*labo iekavu*.

Burtus $\exists$ un $\forall$ sauc par *kvantoriem*, attiecīgi

$\exists$	sauc par	*eksistences kvantoru*,
$\forall$	sauc par	*universālkvantoru*.

Alfabēta $\mathcal{P}$ vārdu (∇^n) sauc par *mainīgu indivīdu* jeb *individuālo mainīgo*, ja tikai $\nabla^n \neq \lambda$. Savukārt vārdu $(\diamondsuit^n)$ sauc par *konstanti*, ja tikai $\diamondsuit^n \neq \lambda$.

9.6.2. Definīcija. (i) *Katru individuālo mainīgo un katru konstanti sauc par termu.*

(ii) *Ja $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ir termi, tad vārdu $(\Box^n|^k T_1 T_2 \ldots T_n)$, kur $k \in \mathbb{Z}_+$, sauc par termu.*

Vārdu $\Box^n|^k$, kur $k \in \mathbb{Z}_+$ un $n \in \mathbb{Z}_+$, sauc par n–vietīgu *funcijas* jeb *operācijas simbolu.*

No formālā redzes viedokļa te viss ir korekti, taču lasītājam var rasties jautājums:

— Kam tie termi domāti?

Ja lietojam vairāk pierastus apzīmējumus, teiksim,

$$x_2 \leftharpoondown (\nabla^2), \quad a_5 \leftharpoondown (\diamondsuit^5) \quad \text{un} \quad f_7^2 \leftharpoondown \Box^2|^7,$$

tad $(\Box^2|^7(\nabla^2)(\diamondsuit^5)) = f_7^2(x_2, a_5)$. No šī piemēra redzams, ka termi domāti, lai sintaktiski aprakstītu funkciju kompozīcijas.

9.6.3. Definīcija. *Ja* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *ir termi, tad vārdu* $(\Delta^n|^k T_1 T_2 \ldots T_n)$*, kur* $k \in \mathbb{Z}_+$*, sauc par elementāru formulu.*

Vārdu $\Delta^n|^k$, kur $k \in \mathbb{Z}_+$ un $n \in \mathbb{Z}_+$, sauc par n–vietīgu *predikātsimbolu.*

Ja lietojam vairāk pierastus apzīmējumus, teiksim,

$$a_1 \leftharpoondown (\Diamond), \quad a_2 \leftharpoondown (\Diamond\Diamond) \quad \text{un} \quad P_1^2 \leftharpoondown \Delta\Delta|,$$

tad $(\Delta\Delta|(\Diamond)(\Diamond\Diamond)) = P_1^2(a_1, a_2)$. Un te nu mēs atpazīstam gan predikātu, gan indivīdus.

Tāpat kā izteikumu loģikā formulas jēdzienu ievieš ar vispārinātās indukcijas palīdzību.

9.6.4. Definīcija. (i) *Katru mainīgu izteikumu sauc par formulu.*

(ii) *Katru elementāru formulu sauc par formulu.*

(iii) *Ja* $\mathfrak{A}$ *ir formula, tad* $(\neg\mathfrak{A})$ *sauc par formulu.*

(iv) *Ja* $\mathfrak{A}$ *un* $\mathfrak{B}$ *ir formulas, tad*

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B})$$

sauc par formulām.

(v) *Ja* $\mathfrak{A}$ *ir formula un* x *ir mainīgs indivīds, tad vārdus*

$$(\exists x \mathfrak{A}) \qquad \text{un} \qquad (\forall x \mathfrak{A})$$

sauc par formulām.

Vārdus $\exists x$ un $\forall x$ sauc par *kvantoru kompleksiem.*

Līdz ar to mēs esam definējuši predikātu loģikas valodu alfabētā $\mathcal{P}$, ko īsuma labad apzīmēsim ar $F\overline{rm}$. Šīs valodas vārdus mēs tikko nosaucām par formulām.

Pieraksta ērtības labad (mēs vēlamies būt pēc iespējas elastīgāki) mainīgos izteikumus turpmāk apzīmēsim ar lielajiem burtiem (parasti no latīņu alfabēta sākuma) $A, B, C, \ldots$ Mainīgo predikātu apzīmēšanai tāpat lietosim lielos burtus (parasti no latīņu alfabēta vidusdaļas) $P, Q, R, \ldots$ Konstantes apzīmēsim ar mazajiem burtiem (parasti no latīņu alfabēta sākuma)

$a, b, c, \ldots$ funkciju simboliem lietosim latīņu burtus no alfabēta vidusdaļas $f, g, h, \ldots$ mainīgu indivīdu apzīmēšanai galvenokārt lietosim latīņu alfabēta burtus no alfabēta beigām $x, y, z, \ldots$ Tāpat mēs pieļausim izmantot latīņu alfabēta burtus ar indeksiem.

Līdzīgi kā izteikumu loģikas gadījumā, parasti vienojas, ka loģisko operāciju zīmes sakārtotas pēc ciešuma šādā secībā: visciešāk saista negācija ($\neg$), mazāk cieši konjunkcija ($\wedge$) un disjunkcija ($\vee$), vēl mazāk cieši implikācija ($\Rightarrow$) un ekvivalence ($\Leftrightarrow$). Saskaņā ar šo norunu konjunkcija un disjunkcija, arī implikācija un ekvivalence saista vienlīdz cieši. Turklāt vēl vienojas, ka kvantoru kompleksi piesaistās tikpat cieši kā negācija. Tā formula

$$((\forall x A) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x, y))))$$

tagad pierakstāma kā:

$$(\forall x A \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)).$$

Papildus vienosimies parasti nerakstīt arī ārējās iekavas, kurās ieslēgta visa formula. Tagad iepriekš doto formulu var pierakstīt šādi:

$$\forall x A \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y).$$

9.7. Saistīti un brīvi mainīgie

Vispirms sāksim ar konkrētu piemēru. Ņemam izteiksmi x^2 ar naturālu mainīgo x. Šis izteiksmes vērtība ir atkarīga no konkrēti izvēlēta $x \in \mathbb{N}$. Tikpat labi x var aizstāt ar kādu saliktu izteiksmi, teiksim, $3+2$ vai $2n+1$. Visos apskatītajos gadījumos mēs iegūsim konkrētas vērtības.

Ja mēs mainīgo x aizstājam ar y, tad iegūstam radniecīgu izteiksmi, taču jēgas ziņā citu izteiksmi. Pirmajā gadījumā šīs izteiksmes vērtība ir atkarīga no x, otrajā — no y. Citiem vārdiem sakot izteiksmes y^2 vērtība nav atkarīga no konkrētas x vērtības izvēles.

Summu $\sum_{i=1}^{n} a_i$ mēs jau pazīstam. Apskatīsim izteiksmi

$$\sum_{x=1}^{4} x^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \sum_{y=1}^{4} y^2.$$

Tai ir noteikta nedz no x, nedz no y neatkarīga vērtība, proti, skaitlis 30. Ja šai izteiksmē $\sum_{x=1}^{4} x^2$ mēģina mainīgā x ievietot konkrētas vērtības, iegūst bezjēdzīgas izteiksmes, piemēram, ja x aizstājam ar skaitli 0, tad iegūstam izteiksmi

$$\sum_{0=1}^{4} 0^2.$$

Ko varam secināt? Simbols, kurš izteiksmē x^2 bija mainīgais, vairs tāds nav izteiksmē $\sum_{x=1}^{4} x^2$. Tam par iemeslu ir summēšanas operators $\sum_{x=1}^{4}$. Šādu operatora $\sum_{x=1}^{4}$ "sabojātu" mainīgo sauc par *saistītu* mainīgo pretstatā "nesabojātiem" *briviem* mainīgajiem.

Atzīmēsim, ka viens un tas pats mainīgais izteiksmē var ieiet gan brīvi, gan saistīti, piemēram, izteiksmē

$$2x + \sum_{x=1}^{4} x^2$$

mainīgā x pirmā ieeja ir brīva, taču pārejās ieejas ir saistītas.

9.7.1. Definīcija. *Formulu $\mathfrak{A}$ sauc par formulas $\mathfrak{F}$ apakšformulu, ja vārds $\mathfrak{A}$ ir vārda $\mathfrak{F}$ dalītājs.*

Pieņemsim, ka

$$u_1 w_1 v_1 = u_2 w_2 v_2\,.$$

Mēs teiksim, ka w_1 ieeja (u_1, w_1, v_1) *iederās* vārda w_2 ieejā (u_2, w_2, v_2), ja atrodami tādi vārdi u', v', ka

$$u_1 = u_2 u' \quad \text{un} \quad v_1 = v' v_2\,.$$

Citiem vārdiem sakot $|u_1| \geq |u_2|$, $|v_1| \geq |v_2|$ un w_1 ir vārda w_2 dalītājs. Pretējā gadījumā mēs teiksim, ka vārda w_1 ieeja (u_1, w_1, v_1) *neiederās* vārda w_2 ieejā (u_2, w_2, v_2). (Lasītājam atgādinam, ka šo visu mēs pārrunājām jau 5. nodaļā.)

9.7.2. Definīcija. *Mainīgā x ieeju (u, x, v) formulā $\mathfrak{A}$ sauc par saistītu, ja eksistē tāda formulas $\mathfrak{A}$ apakšformula $\dagger x\mathfrak{B}$ un ieeja $(u_1, \dagger x\mathfrak{B}, v_1)$, ka*

- *(u, x, v) iederās ieejā $(u_1, \dagger x\mathfrak{B}, v_1)$;*
- *$\dagger \in \{\exists, \forall\}$.*

Pretējā gadījumā mainīgā x ieeju (u, x, v) formulā $\mathfrak{A}$ sauc par *brīvu*. Saka, ka mainīgais x formulā $\mathfrak{A}$ ieiet *saistīti*, ja eksistē kāda mainīgā x saistīta ieeja (u, x, v) formulā $\mathfrak{A}$. Saka, ka mainīgais x formulā $\mathfrak{A}$ ieiet *brīvi*, ja eksistē kāda mainīgā x brīva ieeja (u, x, v) formulā $\mathfrak{A}$.

Formulu, kurā nav brīvu mainīgo sauc par *slēgtu*, bet formulu, kurā ir brīvi mainīgie sauc par *vaļēju*.

9.7.3. Piemērs. Formulā

$$\exists y P(x, y, z) \Rightarrow \forall y \exists z R(x, y, z)$$

- mainīgais x ieiet brīvi;
- mainīgais y ieiet saistīti;
- mainīgais z ieiet gan brīvi, gan saistīti.

Šī formula ir vaļēja.

9.8. Klasiskā interpretācija

Pieņemsim, ka formulā $\mathfrak{A}$ ieiet

- mainīgie $x_1, x_2, \ldots, x_k$;
- konstantes $a_1, a_2, \ldots, a_l$;
- operāciju simboli $f_1, f_2, \ldots, f_m$;
- predikātsimboli $P_1, P_2, \ldots, P_n$;
- mainīgi izteikumi $A_1, A_2, \ldots, A_s$.

9.8.1. Definīcija. *Pieņemsim, ka dota kāda patvaļīgas dabas kopa $\mathcal{U}$. Attēlojumu $\mathfrak{I}$, kas*

- *katrai konstantei a_i piekārto konkrētu kopas $\mathcal{U}$ elementu $\bar{a}_i$;*
- *katram ν–vietīgam operācijas simbolam f_i piekārto konkrētu ν–vietīgu operāciju $\bar{f}_i : \mathcal{U}^\nu \to \mathcal{U}$;*

- *katram ν–vietīgam predikātsimbolam P_i piekārto konkrētu ν–vietīgu operāciju $\bar{P}_i : \mathcal{U}^\nu \to \{a, p\}$;*
- *katram mainīgam izteikumam A_i piekārto konkrētu kopas $\{a, p\}$ vērtību $\bar{A}_i$,*

sauc par formulas $\mathfrak{A}$ interpretāciju $\mathfrak{I}$ kopā $\mathcal{U}$.

9.8.2. Definīcija. *Jebkuru visur definētu attēlojumu*

$$\mathfrak{v} : \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \to \mathcal{U}$$

sauc par mainīgo novērtējumu.

9.8.3. Definīcija (Terma vērtība).

- *Elementu $\mathfrak{v}(x)$ sauc par mainīgā x vērtību novērtējumā $\mathfrak{v}$.*
- *Elementu $\bar{a}_i$ sauc par konstantes a_i vērtību novērtējumā $\mathfrak{v}$.*
- *Ja $\mathfrak{v}(T_1), \mathfrak{v}(T_2), \ldots, \mathfrak{v}(T_\nu)$ ir attiecīgi termu $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ vērtības novērtējumā $\mathfrak{v}$ un f_i ir ν–vietīgs operācijas simbols, tad*

  $$\bar{f}_i(\mathfrak{v}(T_1), \mathfrak{v}(T_2), \ldots, \mathfrak{v}(T_\nu))$$

  sauc par terma $f_i(T_1, T_2, \ldots, T_\nu)$ vērtību novērtējumā $\mathfrak{v}$.

Tā rezultātā terma vērtība novērtējumā $\mathfrak{v}$ ir atkarīga gan no interpretācijas $\mathfrak{I}$, gan no novērtējuma $\mathfrak{v}$. Turpmāk šī paragrāfa ietvaros ar $\mathfrak{v}_x$ apzīmēsim mainīgo novērtējumu, kas apmierina nosacījumu:

$$\text{ja} \quad x \neq x_i, \quad \text{tad} \quad \mathfrak{v}_x(x_i) = \mathfrak{v}(x_i).$$

9.8.4. Definīcija (Formulas vērtība). *Pieņemsim, ka fiksēta interpretācija $\mathfrak{I}$ un mainīgo novērtējums $\mathfrak{v}$.*

(i) *Vērtību $\bar{A}_i$ sauc par mainīga izteikuma A_i vērtību.*

(ii) *Ja $\mathfrak{v}(T_1), \mathfrak{v}(T_2), \ldots, \mathfrak{v}(T_\nu)$ ir attiecīgi termu $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ vērtības novērtējumā $\mathfrak{v}$ un P_i ir ν–vietīgs predikātsimbols, tad*

$$\bar{P}(\mathfrak{v}(T_1), \mathfrak{v}(T_2), \ldots, \mathfrak{v}(T_\nu))$$

sauc pae elementāras formulas $P(T_1, T_2, \ldots, T_\nu)$ vērtību.

(iii) *Ja* $\mathfrak{v}(\mathfrak{B})$ *ir formulas* $\mathfrak{B}$ *vērtība, tad* $\neg\mathfrak{v}(\mathfrak{B})$ *sauc par formulas* $\neg\mathfrak{B}$ *vērtību.*

(iv) *Ja* $\mathfrak{v}(\mathfrak{B})$ *ir formulas* $\mathfrak{B}$ *vērtība un* $\mathfrak{v}(\mathfrak{C})$ *ir formulas* $\mathfrak{C}$ *vērtība, tad*

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{v}(\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{v}(\mathfrak{C}) & \text{sauc par formulas} & \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \quad \text{vērtību;} \\ \mathfrak{v}(\mathfrak{B}) \wedge \mathfrak{v}(\mathfrak{C}) & \text{sauc par formulas} & \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C} \quad \text{vērtību;} \\ \mathfrak{v}(\mathfrak{B}) \Rightarrow \mathfrak{v}(\mathfrak{C}) & \text{sauc par formulas} & \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C} \quad \text{vērtību;} \\ \mathfrak{v}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow \mathfrak{v}(\mathfrak{C}) & \text{sauc par formulas} & \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{C} \quad \text{vērtību.} \end{array}$$

(v) $$\mathfrak{v}(\exists x\mathfrak{B}) \leftharpoondown \begin{cases} p, \text{ja kaut vienam mainīgo novērtējumam } \mathfrak{v}_x(\mathfrak{B}) = p; \\ a, \text{ pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

$$\mathfrak{v}(\forall x\mathfrak{B}) \leftharpoondown \begin{cases} a, \text{ja kaut vienam mainīgo novērtējumam } \mathfrak{v}_x(\mathfrak{B}) = a; \\ p, \text{ pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

9.8.5. Definīcija.

(i) *Formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par izpildāmu, ja eksistē formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācija* $\mathfrak{I}$ *vismaz vienā kopā* $\mathcal{U}$ *un tāds mainīgo novērtējums* $\mathfrak{v}$*, ka formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = p$.

(ii) *Formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par identiski patiesu, ja katrai formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācijai* $\mathfrak{I}$ *jebkurā kopā* $\mathcal{U}$ *pie visiem mainīgo novērtējumiem* $\mathfrak{v}$ *formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = p$.

(iii) *Formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par atspēkojamu, ja eksistē formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācija* $\mathfrak{I}$ *vismaz vienā kopā* $\mathcal{U}$ *un tāds mainīgo novērtējums* $\mathfrak{v}$*, ka formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = a$.

(iv) *Formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par identiski aplamu, ja katrai formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācijai* $\mathfrak{I}$ *jebkurā kopā* $\mathcal{U}$ *pie visiem mainīgo novērtējumiem* $\mathfrak{v}$ *formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = a$.

(v) *Formulu, kas ir gan izpildāma, gan atspēkojama sauc par neitrālu.*

10. nodaļa

PREDIKĀTU LOĢIKA UN IZTEIKUMU LOĢIKA

Konkrēti predikāti galīgās kopās. Predikātu loģika un izteikumu loģika.

10.1. Konkrēti predikāti

10.1.1. Definīcija. *Jebkuru kopas $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$ apakškopu $\mathcal{P}$ sauc par n–vietīgu konkrētu attiecību (attieksmi, predikātu), kas definēta kopā $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$.*

Ja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \ldots = \mathcal{A}_n$, tad n–vietīgu attiecību $\mathcal{P}$, kas definēta kopā $\mathcal{A}^n$ sauc par *kopā $\mathcal{A}$ definētu n–vietīgu attiecību.*

Vērīgam lasītājam tas var radīt apmulsumu:
— Kopā $\mathcal{A}$ definēts n–vietīgs predikāts (tātad 'attiecība') ir operācija $P : \mathcal{A}^n \to \{a, p\}$, nevis kopas $\mathcal{A}^n$ apakškopa.

Pacentīsimies nodemonstrēt, ka tas viss ir tikai gaumes jautājums.

Katrai kopas $\mathcal{A}^n$ apakškopai $\mathcal{P}$ var definēt operāciju

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftharpoondown \begin{cases} p, & \text{ja} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}; \\ a, & \text{ja} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin \mathcal{P}. \end{cases}$$

Tā rezultātā

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{P} \quad \text{tad un tikai tad, ja} \quad P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p.$$

No otras puses, ja mums ir dota operācija $P : \mathcal{A}^n \to \{a, p\}$, tad mēs varam definēt kopas $\mathcal{A}^n$ apakškopu

$$\mathcal{P} \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p\}.$$

Un atkal

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{P} \quad \text{tad un tikai tad, ja} \quad P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p.$$

Līdz ar to tas demonstrē, ka jēdzienu 'konkrēts preedikāts' mēs varam definēt kopu teorijas ietvaros. Šai nostādnē mūs tā īsti pat neinteresē loģika.

10.2. Predikāti galīgās kopās

Ja kopa $\mathcal{A}$ ir galīga, tad situācija kļūst pārskatāmāka. Pieņemsim, ka $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ un mūs interesē predikāts $x \leq y$. Saprotams, ka

$$0 \leq 0, \quad 0 \leq 1, \quad 1 \leq 1.$$

Tā rezultātā mūsu rīcībā ir kopas $\mathcal{A}^2$ apakškopa

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

Tikpat labi to mēs varam attēlot tabulā

a_1	a_2	$\leq$
0	0	p
0	1	p
1	0	a
1	1	p

Tas parāda metodi, kā mēs kopā $\mathcal{A}$ varam definēt patvaļīgu predikātu P, piemēram, ar tabulu

a_1	a_2	P
0	0	a
0	1	p
1	0	a
1	1	p

Līdz ar to esam definējuši predikātu P ar īpašībām:

$$P(0, 0) = a, \; P(0, 1) = p, \; P(1, 0) = a, \; P(1, 1) = p.$$

Vispārīgā gadījumā, lai definētu m–vietīgu predikātu $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ja kopa $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, nepieciešams katram kortežam

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{A}^m$$

piekārtot kādu kopas $\{a, p\}$ vērtību. Tas nozīmē, ka tabulas

x_1	x_2	$\ldots$	x_{m-1}	x_m	P
a_1	a_1	$\ldots$	a_1	a_1	p_1
a_1	a_1	$\ldots$	a_1	a_2	p_2
.	.	.	.	.	.
a_n	a_n	$\ldots$	a_n	a_n	p_{m^n}

pēdējā ailē jāizvēlas vērtības $p_i \in \{a, p\}$. Saprotams, ja m un n ir pietiekoši lieli skaitļi, tad var izrādīties, ka mums pietrūks gan laika, gan resursu, lai konstruētu šādu tabulu (pat ar datora palīdzību). Piemēram, ja $m = 50$ un $n = 60$, tad nepieciešams konstruēt tabulu ar 60^{50} rindiņām.

10.3. Kvantori galīgās kopās

Šai paragrāfā mēs parādīsim, kā iespējams predikātu loģiku reducēt uz izteikumu loģiku, taču mums nāksies kaut ko upurēt, proti, ierobežoties ar galīgām kopām.

10.3.1. Definīcija. *Formulas $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{B}$ sauc par ekvivalentām, ja $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ ir identiski patiesa formula.*

Līdzīgi kā izteikumu loģikā arī predikātu loģikā lietosim pierakstu $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, ja formulas $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{B}$ ir ekvivalentas.

Konjunkcija ir patiesa tad un tikai tad, ja patiess katrs tās loceklis. No otras puses, $\forall x P(x)$ ir patiess apgalvojums tad un tikai tad, ja $P(a_i)$ ir patiess katram indivīdu kopas elementam a_i. Tātad, ja indivīdu kopa ir galīga, piemēram, tā ir vienāda ar kopu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tad formulas

$$\forall x P(x) \qquad \text{un} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} P(a_i)$$

ir ekvivalentas.

Līdzīgi, disjunkcija ir patiesa tad un tikai tad, ja patiess ir kaut viens tās loceklis. No otras puses, $\exists x P(x)$ ir patiess apgalvojums tad un tikai tad, ja $P(a_i)$ ir patiess kaut vienam indivīdu kopas elementam a_i. Tātad formulas

$$\exists x P(x) \qquad \text{un} \qquad \bigvee_{i=1}^{n} P(a_i)$$

ir ekvivalentas.

10.3.2. Piemērs.

$$\begin{aligned} \forall x \exists y\, P(x,y) &\simeq \forall x \bigvee_{i=1}^{n} P(x,a_i) \\ \forall x \bigvee_{i=1}^{n} P(x,a_i) &\simeq \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i=1}^{n} P(a_j,a_i) \end{aligned}$$

Tātad

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \simeq \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i=1}^{n} P(a_j,a_i).$$

Tagad rodas cerība, ka mūsu rīcībā ir metode, kā mēs varētu pierādīt patvaļīgas predikātu loģikas formulas $\mathfrak{A}$ identisko patiesumu (vismaz galīgās kopās). Taču arī te mums ir jābūt uzmanīgiem.

Ja kopa $\mathcal{A} = \{a\}$, tad formula

$$\exists x P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$$

ir ekvivalenta formulai

$$P(a) \Rightarrow P(a),$$

kas ir identiski patiesa.

Kā rāda sekojošais piemērs, tad šī formula nav identiski patiesa jau kopā ar diviem elementiem.

10.3.3. Piemērs. Pieņemsim, ka $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, tad

$$\begin{aligned} \exists x P(x) &\simeq P(0) \vee P(1), \\ \forall y P(y) &\simeq P(0) \wedge P(1). \end{aligned}$$

Līdz ar to

$$\exists x P(x) \Rightarrow \forall y P(y) \simeq P(0) \vee P(1) \Rightarrow P(0) \wedge P(1).$$

Pieņemsim, ka konkrētais predikāts $\mathcal{P} \leftrightharpoons \{0\}$, tad

$$P(0) \vee P(1) \Rightarrow P(0) \wedge P(1) \sim p \vee a \Rightarrow p \wedge a \sim p \Rightarrow a \sim a.$$

Tātad mums potenciālā nozīmē jāpārbauda, vai formula $\mathfrak{A}$ ir identiski patiesa kopā ar vienu elementu, ar diviem elementiem, ar trim elementiem, utt. Skaidrs, ka mums nav iespējams iespējams pārbaudīt formulas $\mathfrak{A}$ identisko patiesumu visām n vērtībām, jo to ir bezgala daudz.

Vienīgā izeja būtu — atrast tādu metodi, kas nav tieši atkarīga no n, proti, lai vieni un tie paši spriedumi derētu katram pozitīvam veselam n.

10.4. Substitūcijas

Mēs jau lietojām pierakstu $P(x)$ un $P(a)$ ar to saprotot mainīgā x aizstāšanu ar konstanti a. Taču vai tā var rīkoties vienmēr?

Ikvienā formulā jebkuru tās brīvo mainīgo x var aizstāt ar jebkuru konstanti a — rezultātā atkal iegūstam formulu. Tāpat formula rodas, ja brīvu mainīgo x aizstāj ar citu mainīgo, piemēram, y. Tomēr te ir jābūt piesardzīgiem. Tā formulā

$$\exists x\big(P(x,y) \Rightarrow Q(z)\big)$$

droši mainīgo z var aizstāt ar u, v un pat ar y — ievietotais mainīgais formulā būs brīvs, tāpat kā sākotnējais. Taču liekot tur x, predikātsimbola Q arguments kļūs saistīts. Šāda "kvalitātes" maiņa nav vēlama, tāpēc predikātu loģikā vienojas, ka šāda aizstāšana nav pieļaujama.

Tagad pāriesim pie precīzām definīcijām.

10.4.1. Definīcija. *Mainīgā x brīvu ieeju (u, x, v) formulā $\mathfrak{A}$ sauc par y–aizliegtu, ja eksistē tāda formulas $\mathfrak{A}$ apakšformula $\dagger y\mathfrak{B}$ un ieeja $(u_1, \dagger x\mathfrak{B}, v_1)$, ka*

- *(u, x, v) iederās ieejā $(u_1, \dagger y\mathfrak{B}, v_1)$;*
- *$\dagger \in \{\exists, \forall\}$.*

Pretējā gadījumā ieeju (u, x, v) sauc par y–pieļaujamu. Brīva mainīgā x aizstāšanu formulā $\mathfrak{A}$ ar mainīgo y sauc par *pieļaujama*, ja katra mainīgā x brīva ieeja (u, x, v) formulā $\mathfrak{A}$ ir y–pieļaujama.

10.4.2. Definīcija. *Pieņemsim, ka $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir visu mainīgo, kas ieiet termā T, saraksts. Brīva mainīgā x aizstāšanu formulā $\mathfrak{A}$ ar termu T sauc par pieļaujamu, ja mainīgā x aizstāšana formulā $\mathfrak{A}$ ar y_i ir pieļaujama visiem $i \in \overline{1, n}$.*

Ar $\mathfrak{A}(x/T)$ apzīmēsim formulu, kura rodas no formulas $\mathfrak{A}$, pieļaujami aizstājot brīvu mainīgo x ar termu T. Gadījumā, ja x aizstāšana nav pieļaujama, mēs definējam $\mathfrak{A}(x/T) \leftrightharpoons \mathfrak{A}$. Tāpat mēs definējam $\mathfrak{A}(x/T) \leftrightharpoons \mathfrak{A}$, ja formula $\mathfrak{A}$ vispār nesatur mainīgo x vai to satur tikai saistīti.

Ja neradīsies pārpratumi, mēs lietosim arī apzīmējumu $\mathfrak{A}(T)$, ar to saprotot $\mathfrak{A}(x/T)$. Parasti gan šādās situācijās formulas $\mathfrak{A}$ apzīmēšanai lietosim pierakstu $\mathfrak{A}(x)$.

10.4.3. Piemērs. Pieņemsim, ka $\mathfrak{A} \leftrightharpoons \exists x\big(P(x, y) \Rightarrow Q(z)\big)$, tad

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(x/3) &= \mathfrak{A}, \\
\mathfrak{A}(y/3) &= \exists x\big(P(x, 3) \Rightarrow Q(z)\big), \\
\mathfrak{A}(z/3) &= \exists x\big(P(x, y) \Rightarrow Q(3)\big), \\
\mathfrak{A}(z/a) &= \exists x\big(P(x, y) \Rightarrow Q(a)\big), \\
\mathfrak{A}(z/\sin x) &= \mathfrak{A}, \\
\mathfrak{A}(z/\sin y) &= \exists x\big(P(x, y) \Rightarrow Q(\sin y)\big).
\end{aligned}$$

11. nodaļa

GALĪGI IDENTISKAS FORMULAS

Identiskā patiesuma pierādīšana un atspēkošana galīgās kopās. Kvantoru īpašības.

11.1. Formulas kanoniskais attēls

Definīcija 9.8.5 praktiski nedod nekādu metodi, kā varētu konstatēt, ka dotā predikātu loģikas formula ir identiski patiesa. Vēl vairāk, Alonzo Čercs 1936. gadā pierādīja sekojošu teorēmu.

11.1.1. Teorēma (Čercs). *Neeksistē algoritms* $\mathfrak{a}$, *kas patvaļīgai predikātu loģikas formulai* $\mathfrak{A}$ *rēķinātu attēlojumu:*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{A}) = \begin{cases} 0, & \text{ja } \mathfrak{A} \text{ nav identiski patiesa;} \\ 1, & \text{ja } \mathfrak{A} \text{ ir identiski patiesa.} \end{cases}$$

Mēs centīsimies kaut daļēji risināt šo problēmu. Mūs interesēs tikai galīgas kopas $\mathcal{U}$. Turpmāk šīs nodaļas ietvaros, ja nekas speciāli netiks atrunāts, pieņemsim, ka $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Tagad induktīvi definēsim predikātu loģikas formulas $\mathfrak{A}$ *kanonisko attēlu* $\varkappa\mathfrak{A}$.

11.1.2. Definīcija.

(i) *Ja* $\mathfrak{A}$ *ir mainīgs izteikums vai elementāra formula, tad* $\varkappa\mathfrak{A}$ *ir mainīgs izteikums, kura apzīmēšanai lieto to pašu pierakstu* $\mathfrak{A}$.

(ii) *Ja* $\mathfrak{A} = \neg\mathfrak{B}$, *tad* $\varkappa\mathfrak{A} \overline{\leftharpoondown} \neg\varkappa\mathfrak{B}$.

(iii) *Ja* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \ddagger \mathfrak{C}$, *kur* $\ddagger \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, *tad* $\varkappa\mathfrak{A} \overline{\leftharpoondown} \varkappa\mathfrak{B} \ddagger \varkappa\mathfrak{C}$.

(iv) *Ja* $\mathfrak{A} = \exists x\mathfrak{B}(x)$, *tad* $\varkappa\mathfrak{A} \overline{\leftharpoondown} \bigvee\limits_{i=1}^{n} \varkappa\mathfrak{B}(u_i)$.

(v) *Ja* $\mathfrak{A} = \forall x\mathfrak{B}(x)$, *tad* $\varkappa\mathfrak{A} \overline{\leftharpoondown} \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \varkappa\mathfrak{B}(u_i)$.

Te pieraksts $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{B}(u_i)$ lietots kā formulas

$$\mathfrak{B}(u_1) \vee \mathfrak{B}(u_2) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}(u_n)$$

saīsinājums, tāpēc kolīzijas ar indeksu lietošanu nerodas. Ja mēs formulas pierakstā lietojam vairākus šāda tipa saīsinājumus, tad ar indeksu lietošanu jābūt uzmanīgiem.

11.1.3. Piemērs. Pieņemsim, ka $\mathfrak{A}_1 = \exists x\exists y P(x,y)$ un kopa $\mathcal{U} \overline{\leftharpoondown} \{1,2\}$, tad

$$\begin{aligned}
\varkappa\mathfrak{A}_1 &= \bigvee_{i=1}^{2} \varkappa\exists y P(i,y) = \varkappa\exists y P(1,y) \vee \varkappa\exists y P(2,y) \\
&= \bigvee_{i=1}^{2} \varkappa P(1,i) \vee \bigvee_{i=1}^{2} \varkappa P(2,i) \\
&= \varkappa P(1,1) \vee \varkappa P(1,2) \vee \varkappa P(2,1) \vee \varkappa P(2,2) \\
&= P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(2,1) \vee P(2,2) \\
&= \bigvee_{i=1}^{2}\bigvee_{j=1}^{2} P(i,j).
\end{aligned}$$

Taču

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i=1}^{2}\bigvee_{i=1}^{2} P(i,i) &= \bigvee_{i=1}^{2}(P(1,1) \vee P(2,2)) \\
&= P(1,1) \vee P(2,2) \vee P(1,1) \vee P(2,2) \neq \varkappa\mathfrak{A}.
\end{aligned}$$

Brīdinājums. Ja $\mathfrak{A}$ ir elementāra formula, teiksim, $\mathfrak{A} = P(x,a,y)$, tad $\varkappa\mathfrak{A} = P(x,a,y)$, taču $\varkappa\mathfrak{A}$ ir mainīga izteikuma pieraksts. Saprotams īpašos gadījumos viena un tā pāša pieraksta izmantošana dažādu formulu apzīmēšanai var radīt arī sajukumu. Ja tādas bažas mums liksies pamatotas, tad mainīga izteikuma $P(x,a,y)$ apzīmēšanai mēs lietosim arī kādu citu pierakstu, piemēram, $\tilde{P}(x,a,y)$.

11.1.4. Piemērs. Predikātu loģikas formulas

$$\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$$

kanoniskais attēls kopā $\mathcal{U}$ ir izteikumu loģikas formula

$$\begin{aligned}
\varkappa(\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)) &= \neg\varkappa(\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \varkappa(\exists x\ \neg P(x)) \\
&= \neg\bigwedge_{i=1}^{n} P(u_i) \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg P(u_i) \\
&= \neg\bigwedge_{i=1}^{n} P_i \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i.
\end{aligned}$$

Te P_i ir patvaļīgi mainīgi izteikumi.

11.2. Galīgi identiskas formulas

11.2.1. Definīcija.

(i) *Formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par izpildāmu kopā* $\mathcal{U}$*, ja eksistē formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācija* $\mathfrak{I}$ *kopā* $\mathcal{U}$ *un tāds mainīgo novērtējums* $\mathfrak{v}$*, ka formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = p$.

(ii) *Predikātu loģikas formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par identiski patiesu kopā* $\mathcal{U}$*, ja katrai formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācijai* $\mathfrak{I}$ *kopā* $\mathcal{U}$ *pie visiem mainīgo novērtējumiem* $\mathfrak{v}$ *formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = p$.

(iii) *Formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par atspēkojamu kopā* $\mathcal{U}$*, ja eksistē formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācija* $\mathfrak{I}$ *kopā* $\mathcal{U}$ *un tāds mainīgo novērtējums* $\mathfrak{v}$*, ka formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = a$.

(iv) *Formulu* $\mathfrak{A}$ *sauc par identiski aplamu, ja katrai formulas* $\mathfrak{A}$ *interpretācijai* $\mathfrak{I}$ *kopā* $\mathcal{U}$ *pie visiem mainīgo novērtējumiem* $\mathfrak{v}$ *formulas vērtība* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = a$.

(v) *Formulu, kas ir gan izpildāma, gan atspēkojama kopā $\mathcal{U}$ sauc par neitrālu kopā $\mathcal{U}$.*

11.2.2. Teorēma. *Predikātu loģikas formula $\mathfrak{A}$ ir identiski patiesa kopā $\mathcal{U}$ tad un tikai tad, ja $\varkappa\mathfrak{A}$ ir tautoloģija.*

Šī teorēma ir tas pamats, kāpēc mēs aplūkojam tā sauktās galīgi identiskās formulas.

11.2.3. Definīcija. *Formulu $\mathfrak{A}$ sauc par n–identisku, ja tā ir identiski patiesa katrā n elementīgā kopā $\mathcal{U}$.*

Mēs jau iepriekšējā nodaļā noskaidrojām, ka formula

$$\exists x P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$$

ir 1–identiska, bet nav n–identiska, ja $n > 1$.

11.2.4. Piemērs. Formula

$$\mathfrak{A}_2 \leftharpoondown \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$$

ir n–identiska visiem n.

Atrodam formulas $\mathfrak{A}_2$ kanonisko attēlu $\varkappa\mathfrak{A}_2$, un noskaidrojam, vai $\varkappa\mathfrak{A}_2$ ir identiski patiesa.

$$\varkappa\mathfrak{A}_2 = \bigwedge_{i=1}^{n} P(u_i) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} P(u_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} P_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} P_i.$$

Tagad veicam ekvivalentus pārveidojumus

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1}^{n} P_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} P_i \quad &\simeq \quad \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} P_i) \vee \bigvee_{i=1}^{n} P_i \simeq \bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i \vee \bigvee_{i=1}^{n} P_i \\ &\simeq \quad \bigvee_{i=1}^{n} (\neg P_i \vee P_i). \end{aligned}$$

Tā kā $\neg P_1 \vee P_1$ ir tautoloģija, tad arī $\bigvee_{i=1}^{n}(\neg P_i \vee P_i)$ ir tautoloģija. Līdz ar to formula $\mathfrak{A}_2$ ir n–identiska visiem n.

11.2.5. Definīcija. *Predikātu loģikas formulu $\mathfrak{A}$ sauc par galīgi identisku, ja tā ir n–identiska visiem n.*

Mēs tikko pierādījām (Piemērs 11.2.4), ka formula $\mathfrak{A}_2$ ir galīgi identiska.

11.3. Galīgā identiskuma pierādīšana

Mēs jau Piemērā 11.2.4 demonstrējām metodi, kā var pierādīt formulas $\mathfrak{A}_2$ galīgo identiskumu. Vispirms atradām formulu $\varkappa\mathfrak{A}_2$, tad to ekvivalenti pārveidojām par formulu, kuras identisko patiesumu mēs pratām pamatot.

Parasti meklē formulas konjunktivo vai disjunktīvo normālformu, jo normālformām ērtāk pamatot identisko patiesumu.

Tagad parādīsim, ka formulas

$$\begin{aligned} \neg\forall x\ P(x) &\Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x), \\ \neg\exists x\ P(x) &\Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x) \end{aligned}$$

ir galīgi identiskas.

Mēs jau Piemērā 11.1.4 atradām formulas $\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$ kanonisko attēlu

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} P_i \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i.$$

Tagad atliek tikai formulai $\neg \bigwedge_{i=1}^{n} P_i$ pielietot de Morgana likumu, lai secinātu, ka

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} P_i \simeq \bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i.$$

Tā rezultātā

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} P_i \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i \simeq \bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg P_i,$$

kas ir tautoloģija.

Līdzīgi rīkosimies ar formulu $\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$:

$$\begin{aligned} \varkappa(\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)) &= \neg\varkappa(\exists\ P(x)) \Leftrightarrow \varkappa(\forall x\ \neg P(x)) \\ &= \neg \bigvee_{i=1}^{n} P(u_i) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg P(u_i) \\ &= \neg \bigvee_{i=1}^{n} P_i \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg P_i \\ &\simeq \bigwedge_{i=1}^{n} \neg P_i \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg P_i, \end{aligned}$$

kas ir tautoloģija.

11.4. Galīgā identiskuma atspēkošana

Kopas $\mathfrak{A}$ galīgo identiskumu var atspēkot ar to pašu metodi, kāda aprakstīta iepriekšējā paragrāfā. Apskatu sāksim ar formulu $\mathfrak{A}_1$ (Piemērs 11.1.3).

$$\varkappa\mathfrak{A}_1 = \varkappa(\exists x \exists y P(x,y)) = \bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{n} P(u_i,u_j) = \bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{n} P_{ij}.$$

Tā kā visi P_{ij} ir mainīgi izteikumi, tad izvēloties

$$\begin{array}{cccccccccc} & P_{11} & \sim & P_{12} & \sim & \dots & \sim & P_{1n} & & \\ \sim & P_{21} & \sim & P_{22} & \sim & \dots & \sim & P_{2n} & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & & \\ \sim & P_{n1} & \sim & P_{n2} & \sim & \dots & \sim & P_{nn} & \sim a & \end{array}$$

iegūstam $\varkappa\mathfrak{A}_1 \sim a$, t.i., $\varkappa\mathfrak{A}_1$ nav tautoloğija.

Formulu var atspēkot arī veiksmīgi izvēloties pretpiemēru. Saprotams, katrā konkrētā gadījumā pretpiemēra piemeklēšana ir radošs process.

Izvēlamies kopu $\mathcal{A}_1 \leftharpoondown \{0\}$ un predikātu $<$. Šai kopā formula $\exists x \exists y P(x,y)$ ir atspēkojama, jo vienīgais pretendents gan x lomai, gan y lomai ir skaitlis 0. Taču $0 < 0 \sim a$.

Lai arī cik tas liktos dīvaini, šis pretpiemērs der arī formulu

$$\forall x \exists y\ P(x,y), \qquad \exists y \forall x\ P(x,y)$$

atspēkošanai.

Pirmajā brīdī liekas, ka ne tik vienkārši ir atspēkojama formula

$$\mathfrak{A}_3 \leftharpoondown \forall x \exists y\ P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \forall x\ P(x,y).$$

Izvēlamies kopu $\mathcal{A}_3 \leftharpoondown \{0,1\}$ un predikāta P lomai šoreiz izmēğinam $=$. Tā ir formulas $\mathfrak{A}_3$ interpretācija kopā $\mathcal{A}_3$. Šai kopā $\mathcal{A}_3$ formulas $\forall x \exists y\ (x = y)$ vērtība ir p, bet formulas $\exists y \forall x\ (x = y)$ vērtība ir a. Tātad formulas

$$\forall x \exists y\ (x = y) \Leftrightarrow \exists y \forall x\ (x = y)$$

vērtība kopā $\mathcal{A}_3$ ir a. Tas nozīmē, ka $\mathfrak{A}_3$ ir atspēkojama.

11.4.1. Vingrinājums. Atspēkot formulu

$$\forall y \exists x\ P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y\ P(x,y).$$

11.5. Kvantoru komutācija

Mūsu mērķis: pierādīt, ka formula

$$\exists x \forall y\, P(x,y) \quad\Rightarrow\quad \forall y \exists x\, P(x,y),$$

ir galīgi identiska. Šī formula ļoti atgādina iepriekšējā paragrāfā atspēkoto formulu $\mathfrak{A}_3$.

$$\begin{aligned}
& \varkappa\big(\exists x \forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, P(x,y)\big) \\
= {} & \bigvee_{i=1}^{n} \varkappa\big(\forall y\, P(u_i,y)\big) \Rightarrow \bigwedge_{\xi=1}^{n} \varkappa\big(\exists x\, P(x,u_\xi)\big) \\
= {} & \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} P(u_i,u_j) \Rightarrow \bigwedge_{\xi=1}^{n} \bigvee_{\zeta=1}^{n} P(u_\zeta,u_\xi) \\
= {} & \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} P_{ij} \Rightarrow \bigwedge_{\xi=1}^{n} \bigvee_{\zeta=1}^{n} P_{\zeta\xi} \simeq \neg\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} P_{ij}\Big) \vee \Big(\bigwedge_{\xi=1}^{n} \bigvee_{\zeta=1}^{n} P_{\zeta\xi}\Big) \\
\simeq {} & \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} \neg P_{ij}\Big) \vee \Big(\bigwedge_{\xi=1}^{n} \bigvee_{\zeta=1}^{n} P_{\zeta\xi}\Big) \simeq \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\big(\bigvee_{j=1}^{n} \neg P_{ij}\big) \vee \big(\bigwedge_{\xi=1}^{n} \bigvee_{\zeta=1}^{n} P_{\zeta\xi}\big)\Big) \\
\simeq {} & \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{n}\Big(\big(\bigvee_{j=1}^{n} \neg P_{ij}\big) \vee \big(\bigvee_{\zeta=1}^{n} P_{\zeta\xi}\big)\Big)
\end{aligned}$$

Tagad pievēršam uzmanību apakšformulai

$$\begin{aligned}
& \Big(\quad \bigvee_{j=1}^{n} \quad \neg P_{ij} \quad\Big) \quad\vee\quad \Big(\quad \bigvee_{\zeta=1}^{n} \quad P_{\zeta\xi} \quad\Big) \\
= {} & \neg P_{i1} \quad\vee\quad \neg P_{i2} \quad\vee\quad \ldots \quad\vee\quad \neg P_{i\xi} \quad\vee\quad \ldots \quad\vee\quad \neg P_{in} \\
\vee {} & \quad P_{1\xi} \quad\vee\quad P_{2\xi} \quad\vee\quad \ldots \quad\vee\quad P_{i\xi} \quad\vee\quad \ldots \quad\vee\quad \neg P_{n\xi} \quad \sim p,
\end{aligned}$$

jo $\neg P_{i\xi} \vee P_{i\xi} \sim p$. Tas nozīmē, ka konjunkcijas

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{n}\Big(\big(\bigvee_{j=1}^{n} \neg P_{ij}\big) \vee \big(\bigvee_{\zeta=1}^{n} P_{\zeta\xi}\big)\Big)$$

katrs loceklis ir patiess. Tātad $\varkappa\big(\exists x \forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, P(x,y)\big) \sim p$.

11.5.1. Vingrinājumi. Pierādīt, ka formulas

$$\begin{array}{rlcl} \text{(i)} & \exists\, xy\; P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists\, yx\; P(x,y), \\ \text{(ii)} & \forall\, xy\; P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall\, yx\; P(x,y) \end{array}$$

ir galīgi identiskas.

11.6. Kvantoru distributivitāte

Formulas

$$\exists x\, (P(x) \lor Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \tag{11.1}$$

kanoniskais attēls ir formula

$$\bigvee_{i=1}^{n} (P_i \lor Q_i) \Leftrightarrow \big(\bigvee_{i=1}^{n} P_i\big) \lor \big(\bigvee_{i=1}^{n} Q_i\big).$$

Šī formula ir tautoloģija, tāpēc formula (11.1) ir galīgi identiska.

11.6.1. Vingrinājums. Pierādīt, ka formula

$$\forall x\, (P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$$

ir galīgi identiska.

11.7. Nepilnības

Diemžēl eksistē tādas formulas, kas ir galīgi identiskas, bet nav identiski patiesas. Apskatīsim formulu

$$\begin{array}{rl} & \forall x\, \exists y\; P(x,y) \land \forall x\, \neg P(x,x) \\ \land & \forall x\, \forall y\, \forall z\, \big(P(x,y) \land P(y,z) \;\; \Rightarrow \;\; P(x,z)\big). \end{array} \tag{11.2}$$

Pieņemsim, ka formula (11.2) izpildās kādā kopā $\mathcal{A}$, tad šī kopa satur vismaz 2 elementus, jo

$$\forall x\, \exists y\; P(x,y) \sim p \quad \text{un} \quad \forall x\, \neg P(x,x) \sim p.$$

Konkrētības labad pieņemsim, ka

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\} \quad \text{un} \quad P(a_1, a_2) \sim p.$$

Tā kā $\forall x\, \exists y\; P(x, y) \sim p$, tad jābūt tādam elementam $a_3 \in \mathcal{A}$, ka $P(a_2, a_3) \sim p$. Tā rezultātā ar matemātisko indukciju iegūstam virkni

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Pieņemsim, ka $a_{m+k} = a_m$, tad transitivitātes dēļ

$$\Big(\text{ apakšformula} \quad \forall x\, \forall y\, \forall z\, \big(P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)\big)\Big)$$

$$\begin{aligned} P(a_m, a_m) \sim p, \quad \text{jo} \quad p &\sim P(a_m, a_{m+1}) \sim P(a_{m+1}, a_{m+2}) \sim \ldots \sim \\ &\sim P(a_{m+k-1}, a_{m+k}) = P(a_{m+k-1}, a_m). \end{aligned}$$

Pretruna, jo $\neg P(a_m, a_m) \sim p$. Tātad kopai $\mathcal{A}$ jābūt bezgalīgai. Esam parādījuši, ka formulas (11.2) noliegums ir galīgi identisks.

Ja kopas $\mathcal{A}$ lomai izvēlas kopu $\mathbb{Z}_+$ un predikāta P lomai attiecību mazāks $<$, tad kopā $\mathbb{Z}_+$ formula (11.2) izpildās. Līdz ar to formulas (11.2) noliegums nav identiski patiesa predikātu loģikas formula.

Šis piemērs parāda, ka predikātu loģikas formulu identiskā patiesuma pamatošanai jāmeklē cits risinājums.

12. nodaļa

AKSIOMĀTISKA TEORIJA

Aksiomas, aksiomātiska teorija. Izveduma likumi. Klasiskās predikātu loģikas aksiomas.

12.1. Aksiomātiska metode

Aksiomātiskas metodes trīs pamatiezīmes ir:

- tiešs aksiomu pārskaitījums;
- izveduma likumu tiešs formulējums;
- mākslīgu valodu izmantošana teorijas visu teorēmu formulējumos.

Kas attiecas uz mākslīgo valodu, tad to mēs jau esam ieviesuši paragrāfā 9.6. Mūsu pamatizpētes objekts būs valoda $F\overline{rm}$, t.i., predikātu loģikas formulas. Teorēmas būs šīs valodas $F\overline{rm}$ apakškopa, ko apzīmēsim ar $\mathfrak{T}$.

12.2. Aksiomas

Mums vispirms jāizšķiras, ko mēs gribam šai teorijā $\mathfrak{T}$ iekļaut. Saskaņā ar tēzi par tautoloģijām (skatīt 6. nodaļu) katra tautoloģija izsaka kādu vispārīgu domāšanas likumu. Mūsu mērķis ir formalizēt domāšanas likumus. Tātad teorijā $\mathfrak{T}$ jāiekļauj visas tautoloģijas.

Ja mēs vēlamies, šo teoriju lietot matemātikā, tad lietderīgi iekļaut arī vienādības zīmi alfabētā. Līdz ar to mūs interesēs alfabēts

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{=} &\leftharpoondown \{\Delta, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\} \cup \{\nabla, \Diamond, \Box, |, \exists, \forall\} \cup \{=\}\\ &= \mathcal{P} \cup \{=\}.\end{aligned}$$

Saprotams ir nedaudz apgrūtinoši, ka viens un tas pats simbols = tiek lietots gan objektvalodā, gan metavalodā, taču uzmanīgam lasītājam parasti problēmas nerodas.

Ja reiz esam iekļāvuši vienādības zīmi = mūsu alfabētā, tad jāpapildina arī elementāras formulas definīcija, proti,

ja T_1, T_2 ir termi, tad vārdu $(T_1 = T_2)$ sauc par elementāru formulu.

Formulas definīcija nemainās. Jauno valodu, kuras elementi ir formulas, apzīmēsim ar $\overset{=}{Frm}$. Kā redzams $\overline{Frm} \subset \overset{=}{Frm}$.

Tagad jāizšķirās par aksiomām, kas aprakstīs vienādību:

$$\begin{aligned}&x = x;\\ &x = y \quad \Rightarrow \quad \big(\mathfrak{A}(z/x) \Rightarrow \mathfrak{A}(z/y)\big).\end{aligned}$$

Te mēs pieņemam, ka formula $\mathfrak{A}$ mainīgos x un y saistīti nesatur.

Visbeidzot jāizvēlas specifiskas predikātu loģikas aksiomas:

- $\forall x \mathfrak{A}(x) \Rightarrow \mathfrak{A}(t)$,
- $\mathfrak{A}(t) \Rightarrow \exists x \mathfrak{A}(x)$,

kur t patvaļīgs terms.

Loģikā nav kādas vienas vispārpieņemtas aksiomu sistēmas, un pēc tādas patiesībā arī nav vajadzības. Mūsu piedāvātā aksiomu sistēma ir šāda.
Teorijas $\overset{=}{\mathfrak{T}}$ formulas ir:
(i) visas tautoloģijas,
(ii) visas formulas izskatā (vienādības aksiomas):

- $x = x$,
- $x = y \ \Rightarrow \ \big(\mathfrak{A}(z/x) \Rightarrow \mathfrak{A}(z/y)\big)$, kur formula $\mathfrak{A}$ mainīgos x un y saistīti nesatur,

(iii) visas formulas izskatā:

- $\forall x \mathfrak{A}(x) \Rightarrow \mathfrak{A}(t)$,
- $\mathfrak{A}(t) \Rightarrow \exists x \mathfrak{A}(x)$,

kur t patvaļīgs terms.

12.3. Izveduma likumi

Ja mēs atceramies definīciju ar vispārināto indukciju (3. nodaļa), tad uzdodot aksiomas mēs esam nodefinējuši tikai kopu S_0. Tā nav visa teorija $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}$. Lai nodefinētu visu teoriju $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}$, mums jānofiksē izveduma likumi.

(i) Modus ponens: $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$

(ii) Vispārinājuma kārtulas (formula $\mathfrak{A}$ mainīgo x nesatur brīvi):

$$\frac{\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(x)}{\mathfrak{A} \Rightarrow \forall y \mathfrak{B}(y)}, \qquad \frac{\mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathfrak{A}}{\exists y \mathfrak{B}(y) \Rightarrow \mathfrak{A}}$$

Kas attiecas uz Modus ponens izvēli, tad šī likuma lietderību jau skaidrojām 4. nodaļā. Tagad nedaudz par vispārinājuma kārtulām.

12.3.1. Lemma. *Pieņemsim, ka*
(i) $\mathfrak{I}$ *ir formulas* $\mathfrak{A}$ *inerpretācija kopā* $\mathcal{U}$*;*
(ii) $S \leftrightharpoons \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ *ir formulā* $\mathfrak{A}$ *ieejošo mainīgo saraksts;*
(iii) $\mathfrak{v}$ *un* $\mathfrak{v}'$ *kopas* S *mainīgo novērtējumi;*
(iv) $\forall y \in S_x \leftrightharpoons S \setminus \{x\}\ \ \mathfrak{v}(y) = \mathfrak{v}'(y)$.
Ja formula $\mathfrak{A}$ *mainīgo* x *nesatur brīvi, tad* $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{A})$.

□ Pierādījums induktīvs izmantojot formulas vērtības Definīgiju 9.8.4.
(i) Ja formula $\mathfrak{A}$ ir mainīgs izteikums, tad formulas vērtība nav atkarīga nedz no $\mathfrak{v}$, nedz $\mathfrak{v}'$, bet tikai no interpretācijas $\mathfrak{I}$, tāpēc $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{A})$.
(ii) Ja formula $\mathfrak{A}$ ir elementāra un tajā mainīgais x neieiet brīvi, tad šis mainīgais vispār neieiet formulā $\mathfrak{A}$. Tā kā $\forall y \in S_x$ $\mathfrak{v}(y) = \mathfrak{v}'(y)$, tad $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{A})$.
(iii) Ja $\mathfrak{A} = \neg\mathfrak{B}$ un formula $\mathfrak{A}$ mainīgo x nesatur brīvi, tad arī formula $\mathfrak{B}$ mainīgo x nesatur brīvi. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\mathfrak{v}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{B})$, tāpēc

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = \neg\mathfrak{v}(\mathfrak{B}) = \neg\mathfrak{v}'(\mathfrak{B}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{A}).$$

(iv) Ja $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \ddagger \mathfrak{C}$, kur $\ddagger \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ un formula $\mathfrak{A}$ mainīgo x nesatur brīvi, tad arī formulas $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mainīgo x nesatur brīvi. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\mathfrak{v}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{B})$ un $\mathfrak{v}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{C})$, tāpēc

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{B}) \ddagger \mathfrak{v}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{B}) \ddagger \mathfrak{v}'(\mathfrak{C}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{A}).$$

(v) Ja $y \neq x$, $\mathfrak{A} = \dagger y \mathfrak{B}$, kur $\dagger \in \{\exists, \forall\}$ un formula $\mathfrak{A}$ mainīgo x nesatur brīvi, tad arī formula $\mathfrak{B}$ mainīgo x nesatur brīvi.

Atgādinam, ka $\mathfrak{v}_y$ saskaņā ar definīciju ir mainīgo novērtējums, kas sakrīt ar $\mathfrak{v}$ visiem z atšķirīgiem no y. Izvēlamies kādu konkrētu $\mathfrak{v}_y$, ko apzīmēsim ar $\bar{\mathfrak{v}}_y$. Izvēlamies $\mathfrak{v}'_y$ tā, lai $\mathfrak{v}'_y(y) = \bar{\mathfrak{v}}_y(y)$. Tagad novērtējumi $\bar{\mathfrak{v}}_y$ un $\mathfrak{v}'_y$ var atšķirties tikai ar vērtībām $\bar{\mathfrak{v}}_y(x)$ un $\mathfrak{v}'_y(x)$. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\bar{\mathfrak{v}}_y(\mathfrak{B}) = \mathfrak{v}'_y(\mathfrak{B})$.

Līdzīgi, ja esam izvēlējušies kādu konkrētu $\mathfrak{v}'_y$, tad varam piemeklēt tādu $\mathfrak{v}_y$, lai tas ar $\mathfrak{v}'_y$ sakristu visiem z atšķirīgiem no x. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\mathfrak{v}_y(\mathfrak{B}) = \mathfrak{v}'_y(\mathfrak{B})$, tāpēc izpildās nosacījumi:

- $\mathfrak{v}_y(\mathfrak{B}) = p$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam tad un tikai tad, ja $\mathfrak{v}'_y(\mathfrak{B}) = p$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam;
- $\mathfrak{v}_y(\mathfrak{B}) = a$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam tad un tikai tad, ja $\mathfrak{v}'_y(\mathfrak{B}) = a$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam.

Līdz ar to $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{A})$.

(vi) Ja $\mathfrak{A} = \dagger x \mathfrak{B}$, kur $\dagger \in \{\exists, \forall\}$, tad formula $\mathfrak{B}$ mainīgo x var saturēt brīvi. Katrs $\mathfrak{v}_x$ ir arī kāds $\mathfrak{v}'_x$, un otrādi: katrs $\mathfrak{v}'_x$ ir kāds $\mathfrak{v}_x$, jo

$$\forall z \neq x \quad \mathfrak{v}_x(z) = \mathfrak{v}(z) = \mathfrak{v}'(z) = \mathfrak{v}'_x(z).$$

Tas nozīmē, ka izpildās nosacījumi:

- $\mathfrak{v}_y(\mathfrak{B}) = p$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam tad un tikai tad, ja $\mathfrak{v}'_y(\mathfrak{B}) = p$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam;
- $\mathfrak{v}_y(\mathfrak{B}) = a$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam tad un tikai tad, ja $\mathfrak{v}'_y(\mathfrak{B}) = a$ vismaz vienam mainīgo novērtējumam.

Līdz ar to $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{A})$. ■

12.3.2. Teorēma. *Ja formula $\mathfrak{A}$ mainīgo x nesatur brīvi un $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(x)$ ir identiski patiesa, tad formula $\mathfrak{A} \Rightarrow \forall y \mathfrak{B}(y)$ ir identiski patiesa.*

□ Pieņemsim, ka $\mathfrak{I}$ ir formulas $\mathfrak{A} \Rightarrow \forall y \mathfrak{B}(y)$ interpretācija kopā $\mathcal{U}$ un $\mathfrak{v}$ ir formulā $\mathfrak{A} \Rightarrow \forall y \mathfrak{B}(y)$ ieejošo mainīgo novērtējums.

(i) Ja $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = a$, tad $\mathfrak{v}(\mathfrak{A} \Rightarrow \forall y \mathfrak{B}(y)) = p$.

(ii) Ja turppretī $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = p$, tad mums jāparāda, ka $\mathfrak{v}(\forall y \mathfrak{B}(y))) = p$. Saskaņā ar $\mathfrak{v}$ definīciju tas nozīmē, ka jāpierāda vienādība $\mathfrak{v}_y(\mathfrak{B}(y)) = p$ visiem novērtējumiem $\mathfrak{v}_y$.

Izvēlamies formulā $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(x)$ ieejošo mainīgo novērtējumu $\mathfrak{v}'$ tā, lai

$$\mathfrak{v}'(z) \leftharpoondown \begin{cases} \mathfrak{v}(z), & \text{ja} \quad z \neq x; \\ \mathfrak{v}_y(y), & \text{ja} \quad z = x. \end{cases}$$

Tagad atsaucoties uz Lemmu 12.3.1 secināms:

$$\mathfrak{v}'(\mathfrak{A}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{A}) = p.$$

Tā kā $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(x)$ ir identiski patiesa, tad $\mathfrak{v}'(\mathfrak{B}(x)) = p$. Mēs $\mathfrak{v}'$ definējām tā, lai $\mathfrak{v}'(x) = \mathfrak{v}_y(y)$. No šejienes

$$\mathfrak{v}_y(\mathfrak{B}(y)) = \mathfrak{v}'(\mathfrak{B}(x)) = p.$$

Līdz ar to $\mathfrak{v}(\mathfrak{A} \Rightarrow \forall y \mathfrak{B}(y)) = p$. ■

13. nodaļa

KOPU TEORIJA UN LOĢIKA

Kopu teorija un loģika. Kopu vienādība, tās pierādīšana.

13.1. Kopu apvienojums

Saskaņā ar kopu apvienojuma definīciju

$$x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}.$$

No šejienes

$$\begin{aligned} & x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \\ \Leftrightarrow \quad & x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B} \\ \Leftrightarrow \quad & x \in \mathcal{B} \vee x \in \mathcal{A} \\ \Leftrightarrow \quad & x \in \mathcal{B} \cup \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Tagad ir īstais brīdis parunāt par pierakstu

$$A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_n.$$

Šo pierakstu plaši lieto matemātikā kā saīsinājumu formulai

$$(A_1 \Leftrightarrow A_2) \wedge (A_2 \Leftrightarrow A_3) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \Leftrightarrow A_n).$$

Parasti pierāda, ka

$$\forall i \in \overline{1, n-1}\ A_i \Leftrightarrow A_{i+1} \sim p.$$

No šejienes izriet, ka $A_1 \Leftrightarrow A_n \sim p$. Ja nu $A_1 \sim p$, tad arī $A_n \sim p$ un otrādi: ja $A_n \sim p$, tad $A_1 \sim p$.

Mūsu gadījumā tas nozīmē, ka

$$x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{B} \cup \mathcal{A},$$

t.i., $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$. Saprotams, lai pamatotu mūsu pierādījumu, būtiski nācās balstīties uz tautoloģiju

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A.$$

13.1.1. Vingrinājums. Balstoties uz tautoloģiju

$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

pierādīt, ka

$$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}.$$

13.2. Kopu šķēlums

Saskaņā ar kopu šķēluma definīciju

$$x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}.$$

No šejienes

$$\begin{aligned} & x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \mathcal{B} \wedge x \in \mathcal{A} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Tātad $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$.

13.2.1. Vingrinājumi. Pierādīt!

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) & = & (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}, \\ \text{(ii)} & \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) & = & (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}), \\ \text{(iii)} & \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) & = & (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}). \end{array}$$

13.3. Kopu starpība

Saskaņā ar kopu starpības definīciju

$$x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}.$$

No šejienes

$$\begin{aligned}
& x \in \mathcal{A} \setminus (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \ \wedge\ x \notin \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \wedge \neg(x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \wedge \neg(x \in \mathcal{B} \ \wedge\ x \in \mathcal{C}) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \wedge (\neg(x \in \mathcal{B}) \ \vee\ \neg(x \in \mathcal{C})) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \wedge (x \notin \mathcal{B} \ \vee\ x \notin \mathcal{C}) \\
\Leftrightarrow\quad & (x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}) \ \vee\ (x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{C}) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \ \vee\ x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C} \\
\Leftrightarrow\quad & x \in (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Tātad $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C})$.

13.3.1. Vingrinājums. Pierādīt!

$$\mathcal{A} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C})$$

13.4. Dekarta reizinājums

Saskaņā ar kopu Dekarta reizinājuma definīciju

$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B.$$

No šejienes

$$\begin{aligned}
& (x, y) \in \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \ \wedge\ y \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B} \wedge y \in \mathcal{C} \\
(\Leftrightarrow\quad & (x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}) \wedge (x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{C}) \\
\Leftrightarrow\quad & (x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \wedge (x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C} \\
\Leftrightarrow\quad & (x, y) \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Tātad $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{C})$.

13.4.1. Vingrinājums. Pierādīt!

$$\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \times \mathcal{C})$$

14. nodaļa

SAKĀRTOJUMS

Priekšsakārtojums, sakārtojums. Kopas sadalījums, ekvivalences tipa predikāts. Faktorkopa.

14.1. Priekšsakārtojums

Dažām attiecībām ir fundamentāla loma ne tikai matemātiskajā loģikā, bet arī visā matemātikā. Šīs nodaļas ietvaros ar $\preceq$ apzīmēsim patvaļīgu divvietīgu attiecību.

14.1.1. Definīcija. *Kopā K definētu divvietīgu attiecību $\Theta \subseteq K^2$ sauc par:*
(i) *refleksīvu, ja* $\forall x \in K\ (x,x) \in \Theta$*;*
(ii) *antisimetrisku, ja* $\forall x \in K\ \forall y \in K\ [\,(x,y) \in \Theta \wedge (y,x) \in \Theta \Rightarrow x = y\,]$*;*
(iii) *transitīvu, ja*

$$\forall x \in K\ \forall y \in K\ \forall z \in K\ [\,(x,y) \in \Theta \wedge (y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta\,].$$

Kopā K definētu attiecību Θ sauc par *priekšsakārtojumu*, ja tā ir gan refleksīva, gan transitīva. Parasti, ja Θ ir priekšsakārtojums, tad tā vietā, lai rakstītu $(x,y) \in \Theta$ lieto pierakstu $x \preceq_\Theta y$. Ja no konteksta ir noprotams konkrēts priekšsakārtojums vai arī tā specifiskās īpašības nav būtiskas, tad pieraksta $x \preceq_\Theta y$ vietā mēdz lietot pierakstu $x \preceq y$.

14.1.2. Piemēri. (i) Sāksim ar sadzīviska rakstura piemēru. Uğis krogā pasūta glāzi bumbieru sulas. Pēc brīža viesmīlis paziņo, ka bumbieru sula beigusies, bet viņš var piedāvāt gan jāņogu sulu, gan upeņu sulu; uz ko Uğis atbild:

— Man vienalga, pēc jūsu izvēles.

Faktiski Uğis ir kopā

$$\{\text{ bumbieru sula, jāņogu sula, upeņu sula }\}$$

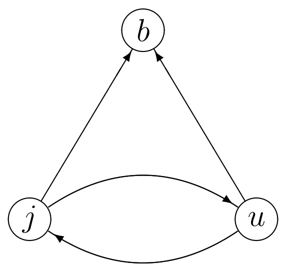
definējis priekšsakārtojumu:

$$\Theta = \{(b,b),(j,j),(u,u),(j,u),(u,j),(j,b),(u,b)\}.$$

Mēs te īsuma labad ieviesām apzīmējumus:

bumbieru sula	—	b;
jāņogu sula	—	j;
upeņu sula	—	u.

Shematiski to var attēlot ar orientētu grafu:



Tā, piemēram, $u \preceq j$ un $j \preceq b$, tāpēc $u \preceq b$.

(ii) Noscījums $|u| \leq |v|$ kopā $\mathcal{A}^*$ definē priekšsakārtojumu.

(iii) Līdzīgi nosacījums $x_1^2 + x_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2$ kopā $\mathbb{R}^2$ definē priekšsakārtojumu $\preceq$. Saskaņā ar definīciju šai gadījumā $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$.

(iv) Visu trijstūru kopā nosacījums: trijstūra $A_1B_1C_1$ laukums mazāks, vienāds ar trijstūra $A_2B_2C_2$ laukumu definē priekšsakārtojumu.

14.2. Sakārtojums

14.2.1. Definīcija. *Kopā $\mathcal{A}$ definētu priekšsakārtojumu $\preceq$ sauc par daļēju sakārtojumu, ja tas ir antisimetrisks.*

14.2.2. Piemērs. Nosacījums $x \leq u \wedge y \leq v$ komplekso skaitļu laukā $\mathbb{C}$ definē daļēju sakārtojumu. Saskaņā ar definīciju šai gadījumā $x+yi \preceq u+vi$.

14.2.3. Definīcija. *Kopā $\mathcal{A}$ definētu daļēju sakārtojumu $\preceq$ sauc par ķēdi jeb lineāru sakārtojumu, ja*

$$\forall x \in \mathcal{A}\, \forall y \in \mathcal{A}\, (x \preceq y \,\vee\, y \preceq x).$$

14.2.4. Piemērs. *Reālo skaitļu laukā $\mathbb{R}$ attiecība $\leq$ ir lineārs sakārtojums.*

14.3. Kopas sadalījums

Terminu *kopu saime* $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ mēs lietosim kā ekvivalentu apgalvojumam: kopas $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ elementi ir kopas $\mathcal{A}_i$. Kopu saimi $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ sauc par *galīgu*, ja $\mathcal{I}$ ir galīga kopa vai arī tā ir tukša kopa. Saimi $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ sauc par *sanumurējamu*, ja $\mathcal{I}$ ir sanumurējama, galīga vai tukša kopa. Turpmāk, lai atslogotu apzīmējumus, ja no konteksta būs noprotama indeksu kopa $\mathcal{I}$ vai arī tās daba nebūs būtiska, mēs lietosim pierakstu

$$\{\mathcal{A}_i\} \leftharpoondown\!\!\!= \{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}.$$

14.3.1. Definīcija. *Kopu saimi $\{\mathcal{A}_i\}$ sauc par kopas $\mathcal{A}$ sadalījumu, ja*

- $\forall i\, (\mathcal{A}_i \neq \emptyset \;\wedge\; \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A})$;
- $\forall a \in \mathcal{A}\, \exists! i \;\; a \in \mathcal{A}_i$.

Kopas $\mathcal{A}_i$ sauc par sadalījuma $\{\mathcal{A}_i\}$ *blakusklasēm.* Blakusklasi, kas satur elementu a apzīmē ar $[a]_{\{\mathcal{A}_i\}}$.

Elementu $a \in \mathcal{A}_j$ šai gadījumā sauc par blakusklases $\mathcal{A}_j$ *pārstāvi.* Ja no konteksta skaidrs, kurš sadalījums ir padomā, tad lieto īsāku apzīmējumu $[a]$. Kopu

$$\mathcal{A}/\{\mathcal{A}_i\} \leftharpoondown\!\!\!= \{\mathcal{A}_i\}$$

šai situācijā sauc par kopas $\mathcal{A}$ *faktorkopu* pēc sadalījuma $\{\mathcal{A}_i\}$. Kā redzams $\{\mathcal{A}_i\}$ un $\mathcal{A}/\{\mathcal{A}_i\}$ ir viena un tā pati kopa, tikai vienā gadījumā runā par kopu saimi, bet otrā — par kopu, kuras elementi ir blakusklases.

14.3.2. Definīcija. *Attēlojumu* $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\{\mathcal{A}_i\}$, *kas katram kopas* $\mathcal{A}$ *elementam* a *piekārto blakusklasi* $[a]$ *sauc par dabīgo attēlojumu.*

14.3.3. Sekas. *Kopas* $\mathcal{A}$ *dabīgais attēlojums ir sirjekcija.*

□ Katra blakusklase satur kādu kopas $\mathcal{A}$ elementu. ■

14.3.4. Piemēri. (i) Kopu saime $\{Z_0, Z_1\}$, kur

$Z_0 \leftrightharpoons \{\text{pārskaitļi}\}$, $Z_1 \leftrightharpoons \{\text{nepārskaitļi}\}$, ir veselo skaitļu kopas $\mathbb{Z}$ sadalījums. Savukārt

$$\pi(x) \leftrightharpoons \begin{cases} Z_0, & \text{ja} \quad x \text{ ir pārskaitlis;} \\ Z_1, & \text{ja} \quad x \text{ ir nepārskaitlis} \end{cases}$$

ir šī sadalījuma dabīgais attēlojums.

(ii) Kopu saime $\{N_\alpha \,|\, \alpha \geq 0\}$, kur

$$N_0 \leftrightharpoons \{0\}, \qquad \forall \alpha > 0 \;\; N_\alpha \leftrightharpoons \{\alpha, -\alpha\},$$

ir reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ sadalījums. Savukārt

$$\pi(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \{0\}, & \text{ja} \quad x = 0; \\ \{x, -x\}, & \text{ja} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

ir šī sadalījuma dabīgais attēlojums.

(iii) Pieņemsim, ka $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ ir sirjekcija, tad kopu saime $\{A_b \,|\, b \in B\}$, kur $A_b \leftrightharpoons \{a \in A \,|\, \varphi(a) = b\}$, ir kopas A sadalījums.

□ (i) Ja reiz $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ ir sirjekcija, tad $\forall b \in B \; A_b \neq \emptyset$.

(ii) Kopas A_b elementi ir arī kopas A elementi, tāpēc $A_b \subseteq A$.

(iii) Tā ka $\forall x \in A \; \exists! y \in B \; \varphi(x) = y$, tad $\forall x \in A \; \exists! b \; x \in A_b$.

Še mēs pārskaitījām visas sadalījuma īpašības un konstatējām, ka kopu saimei $\{A_b \,|\, b \in B\}$ tās visas piemīt. ■

14.4. Ekvivalences tipa predikāts

14.4.1. Definīcija. *Kopā* K *definētu divvietīgu attiecību* $E \subseteq K^2$ *sauc par:*

(i) *refleksīvu, ja* $\forall x \in K \; (x, x) \in E$;

(ii) *simetrisku, ja* $\forall x \in K \; \forall y \in K \; [\,(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E\,]$;

(iii) *transitīvu, ja*

$$\forall x \in K \; \forall y \in K \; \forall z \in K \; [\,(x, y) \in E \wedge (y, z) \in E \Rightarrow (x, z) \in E\,].$$

Kopā K definētu attiecību E sauc par *ekvivalences tipa predikātu*, ja tā ir gan refleksīva, gan simetriska, gan transitīva. Parasti, ja E ir ekvivalences tipa predikāts, tad tā vietā, lai rakstītu $(x, y) \in E$ lieto pierakstu $x \equiv_E y$. Ja no konteksta ir noprotams konkrēts ekvivalences tipa predikāts vai arī tā specifiskās īpašības nav būtiskas, tad pieraksta $x \equiv_E y$ vietā mēdz lietot pierakstu $x \equiv y$.

14.4.2. Apgalvojums. *Katrs kopas $\mathcal{A}$ sadalījums $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ kopā $\mathcal{A}$ definē ekvivalences tipa predikātu*

$$E \leftharpoondown \{(x, y) \mid \exists i \in \mathcal{I}\ (x \in \mathcal{A}_i \wedge y \in \mathcal{A}_i)\}.$$

□ (i) $\forall x \in \mathcal{A}\ (x, x) \in E$, jo $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ ir kopas $\mathcal{A}$ sadalījums; tāpēc

$$\forall x \in \mathcal{A}\ \exists i \in \mathcal{I}\ (x \in \mathcal{A}_i \wedge x \in \mathcal{A}_i).$$

(ii) $\forall x \in \mathcal{A}\ \forall y \in \mathcal{A}\ [\,(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E\,]$, jo vienmēr ir patiesa implikācija

$$\exists i \in \mathcal{I}\ (x \in \mathcal{A}_i \wedge y \in \mathcal{A}_i) \Rightarrow \exists i \in \mathcal{I}\ (y \in \mathcal{A}_i \wedge x \in \mathcal{A}_i).$$

(iii) Vispirms ņemam vērā:

$$\text{ja} \quad y \in \mathcal{A}_i \quad \text{un} \quad y \in \mathcal{A}_j, \quad \text{tad} \quad i = j,$$

jo $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ ir kopas $\mathcal{A}$ sadalījums. Tātad

$$\begin{aligned} \exists i \in \mathcal{I}\ (x \in \mathcal{A}_i \wedge y \in \mathcal{A}_i) \quad &\wedge \quad \exists j \in \mathcal{I}\ (y \in \mathcal{A}_j \wedge z \in \mathcal{A}_j) \\ &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathcal{I}\ (x \in \mathcal{A}_k \wedge z \in \mathcal{A}_k). \end{aligned}$$

Līdz ar to $\forall x \in \mathcal{A}\ \forall y \in \mathcal{A}\ \forall z \in \mathcal{A}\ [\,(x, y) \in E \wedge (y, z) \in E \Rightarrow (x, z) \in E\,]$.

Še mēs secīgi pārskaitījām visas ekvivalences tipa predikāta īpašības un konstatējām, ka attiecībai E tās visas piemīt. ■

Mūsu tuvākais mērķis pierādīt šī apgalvojuma apgriezto apgalvojumu, taču šim nolūkam mums nepieciešama izvēles aksioma.

14.5. Izvēles aksioma

Pieņemsim, ka dota patvaļīgi fiksēta kopa $\mathfrak{M}$ un šīs kopas visu apakškopu kopa

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \leftharpoondown \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}\}.$$

Izvēles aksioma. Katrai netukšai kopai $\mathfrak{M}$ eksistē tāds kopas $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ attēlojums φ kopā $\mathfrak{M}$, ka izpildās nosacījums:

$$\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M} \Rightarrow \varphi(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}.$$

14.5.1. Apgalvojums. *Katram kopā $\mathcal{A}$ definētam ekvivalences tipa predikātam $\equiv$ eksistē tāds kopas $\mathcal{A}$ sadalījums $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$, ka*

$$\forall x \in \mathcal{A}\, \forall y \in \mathcal{A}\, [x \equiv y \Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I}\, (x \in \mathcal{A}_i \,\wedge\, y \in \mathcal{A}_i)].$$

$\Box$ Katram kopas $\mathcal{A}$ elementam x definējam kopu

$$[x] \leftharpoondown \{y \in \mathcal{A} \mid x \equiv y\}.$$

(i) Parādīsim: ja $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, tad $[x] = [y]$.

Pieņemsim, ka $a \in [x] \cap [y]$ un $b \in [x]$, tad $b \equiv a$ un $a \equiv y$, tāpēc $b \equiv y$, jo $\equiv$ ir transitīva attiecība. Tātad $[x] \subseteq [y]$.

Līdzīgi secināms, ka $[y] \subseteq [x]$. Līdz ar to $[x] = [y]$.

(ii) Saskaņā ar izvēles aksiomu eksistē attēlojums $\varphi : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ar īpašību

$$\emptyset \neq K \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(K) \in K.$$

Definējam kopu

$$\mathcal{I} \leftharpoondown \{\varphi(K) \mid [\varphi(K)] = K\}.$$

Pieņemsim, ka $i \in \mathcal{I}$, tad eksistē tāda kopa $K \subseteq \mathcal{A}$, ka $i = \varphi(K)$ un $[\varphi(K)] = K$. No šejienes $[i] = [\varphi(K)] = K$. Tātad $i = \varphi(K) = \varphi([i])$.

(iii) Izrādās, ka $\{\, [i] \mid i \in \mathcal{I}\,\}$ ir meklētais kopas $\mathcal{A}$ sadalījums.

- Vispirms parādīsim, ka $\forall i \in \mathcal{I}\; ([i] \neq \emptyset \,\wedge\, [i] \subseteq \mathcal{A})$.

Ja reiz $i \in \mathcal{I}$, tad $\exists K \subseteq \mathcal{A}\quad i = \varphi(K)$. Tā kā $\varphi : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, tad $\varphi(K) \in \mathcal{A}$; tāpēc $\varphi(K) \in [\varphi(K)] \neq \emptyset$, turklāt, saskaņā ar $[\varphi(K)]$ definīciju $[\varphi(K)] \subseteq \mathcal{A}$.

- Tagad parādīsim, ka $\forall a \in \mathcal{A}\; \exists! i \in \mathcal{I}\quad a \in [i]$.

Pieņemsim, ka $a \in \mathcal{A}$, tad $a \in [a]$. Saskaņā ar φ definīciju $\varphi([a]) \in [a]$. Tas ļauj secināt (skatīt pierādījuma punktu (i)), ka $[\varphi([a])] = [a]$. Tātad, ja $i = \varphi([a])$, tad $i \in \mathcal{I}$ un $a \in [i]$.

Pieņemsim, ka $j \in \mathcal{I}$ un $a \in [j]$, tad (skatīt pierādījuma punktu (i)) $[j] = [a] = [i]$. Tā rezultātā (skatīt (ii)) $j = \varphi([j]) = \varphi([i]) = i$.

Še mēs pārskaitījām visas kopas $\mathcal{A}$ sadalījuma īpašības un konstatējām, ka kopu saimei $\{\, [i] \mid i \in \mathcal{I} \,\}$ tās visas piemīt.

- Pieņemsim, ka x un y ir kopas $\mathcal{A}$ elementi, un $x \equiv y$, tad $\exists i \in \mathcal{I}\ x \in [i]$. Tā kā $x \equiv y$, tad arī $y \in [i]$.

- Pieņemsim, ka eksistē tāds $i \in \mathcal{I}$, ka $x \in [i]$ un $y \in [i]$, tad saskaņā ar blakusklases $[i]$ definīciju $x \equiv y$.

Līdz ar to apgalvojums pierādīts pilnībā. ■

14.5.2. Vingrinājumi. (i) Pierādīt, ka katram kopā $\mathcal{A}$ definētam ekvivalences tipa predikātam $\equiv$ eksistē viens vienīgs kopas $\mathcal{A}$ sadalījums $\{\mathcal{A}_i\}$, kas apmierina nosacījumu:

$$\forall x \in \mathcal{A}\ \forall y \in \mathcal{A}\ [x \equiv y \Leftrightarrow \exists i\, (x \in \mathcal{A}_i\ \wedge\ y \in \mathcal{A}_i)]. \tag{14.1}$$

(ii) Pierādīt, ka katram kopas $\mathcal{A}$ sadalījumam $\{\mathcal{A}_i\}$ eksistē viens vienīgs kopā $\mathcal{A}$ definēts ekvivalences tipa predikātam $\equiv$, kas apmierina nosacījumu (14.1). Šai gadījumā saka, ka ekvivalences tipa predikāts $\equiv$ *atbilst kopas* $\mathcal{A}$ *sadalījumam* $\{\mathcal{A}_i\}$

14.6. Faktorkopa

Pieņemsim, ka $\equiv$ ir kopā $\mathcal{A}$ definēts ekvivalences tipa predikāts. Mēs teiksim, ka kopas $\mathcal{A}$ sadalījums $\{\mathcal{A}_i\}$ *atbilst ekvivalences tipa predikātam* $\equiv$, ja tas apmierina nosacījumu (14.1). Šai situācijā kopu

$$\mathcal{A}/\equiv\ \leftharpoondown\ \mathcal{A}/\{\mathcal{A}_i\}$$

sauc par kopas $\mathcal{A}$ faktorkopu pēc ekvivalences tipa predikāta $\equiv$.

14.6.1. Definīcija. *Pieņemsim, ka* $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ *ir kopas* $\mathcal{A}$ *sadalījums. Kopu* $\{a_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ *sauc par sadalījuma* $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ *pilnu pārstāvju sistēmu, ja* $\forall i \in \mathcal{I}\ \ a_i \in \mathcal{A}_i$.

Ja nerodas pārpratumi, tad lieto īsāku izteiksmes formu, proti, tā vietā, lai teiktu, ka $\{a_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ ir sadalījuma $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ pilna pārstāvju sistēma, saka: $\{a_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ ir pilna pārstāvju sistēma.

14.6.2. Apgalvojums. *Katram sadalījumam eksistē pilna pārstāvu sistēma.*

$\square$ Pieņemsim, ka $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ ir kopas $\mathcal{A}$ sadalījums. Ja reiz mums jāpierāda, ka eksistē pilna pārstāvju sistēma $\{a_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$, tad tas nozīmē, ka jāpierāda, ka eksistē attēlojums

$$f : \mathcal{I} \to \mathcal{A} \quad \text{ar īpašību} \quad f(i) \in \mathcal{A}_i.$$

Mums dots kopas $\mathcal{A}$ sadalījums $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$. Šis pieraksts nozīmē, ka katram $i \in \mathcal{I}$ mūsu rīcībā ir kāda konkrēta kopas $\mathcal{A}$ apakškopa $\mathcal{A}_i$. Tātad dots attēlojums

$$\psi : \mathcal{I} \to \mathfrak{P}(\mathcal{A}) : i \mapsto \mathcal{A}_i.$$

Saskaņā ar izvēles aksiomu eksistē attēlojums $\varphi : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ar īpašību

$$\emptyset \neq K \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(K) \in K.$$

No šejienes: mūsu meklētais attēlojums $f = \varphi \circ \psi$. Tiešām, $\psi(i) = \mathcal{A}_i$; savukārt $\varphi(\mathcal{A}_i) \in \mathcal{A}_i$. $\blacksquare$

14.6.3. Definīcija. *Pieņemsim, ka sadalījums $\{\mathcal{A}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ atbilst kopā $\mathcal{A}$ definētam ekvivalences tipa predikātam $\equiv$. Kopu $\{a_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ sauc par pilnu pārstāvju sistēmu, kas atbilst ekvivalences tipa predikātam $\equiv$, ja*

$$\forall i \in \mathcal{I} \;\; a_i \in \mathcal{A}_i.$$

Ja nerodas pārpratumi, tad lieto īsāku izteiksmes formu, proti, tā vietā, lai teiktu, ka $\{a_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ ir pilna pārstāvju sistēma, kas atbilst ekvivalences tipa predikātam $\equiv$, saka: $\{a_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ ir ekvivalences pilna pārstāvju sistēma.

14.6.4. Vingrinājums. *Katram ekvivalences tipa predikātam eksistē pilna pārstāvju sistēma.*

14.7. Attēlojuma kodols

14.7.1. Definīcija. *Attiecību*

$$\mathrm{K\overline{er}}f \leftharpoondown \{(x,y)|f(x)=f(y)\}$$

sauc par attēlojuma $f : A \to B$ kodolu.

14.7.2. Vingrinājums. *Pierādīt, ka attēlojuma $f : A \to B$ kodols ir kopā A definēts ekvivalences tipa predikāts.*

14.7.3. Definīcija. *Attēlojumu $\pi : A \to A/\mathrm{K\overline{er}}f : a \mapsto [a]$ sauc par attēlojuma $f : A \to B$ dabīgo attēlojumu.*

Mēs teiksim, ka diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

ir *komutatīva*, ja $f = gh$; te $f : A \to B$, $g : A \to C$, $h : C \to B$ ir attēlojumi.

14.7.4. Teorēma. *Katram attēlojumam $f : A \to B$ eksistē viens vienīgs attēlojums $f_* : A/\mathrm{K\overline{er}}f \to B$, kam diagramma*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\
& A/\mathrm{K\overline{er}}f \arrow[ur, "f_*"'] &
\end{tikzcd} \tag{D1}$$

ir komutatīva; turklāt šis attēlojums f_* ir injekcija.

□ (i) Definējam attēlojumu $f_* : A/\mathrm{K\overline{er}}f \to B : [a] \mapsto af$. Parādīsim, ka šī definīcija ir korekta, proti, ja $[x] = [a]$, tad $[x]f_* = [a]f_*$.

Pieņemsim, ka $[x] = [a]$, tad $(x, y) \in \mathrm{K\overline{er}}f$, t.i., $xf = af$. No šejienes $[x]f_* = xf = af = [a]f_*$. Tātad f_* definīcija ir atkarīga tikai no blakusklases $[a]$ izvēles, nevis no konkrētā elementa $x \in [a]$ izvēles.

(ii) Pieņemsim, ka $a \in A$, tad $a\pi f_* = (a\pi)f_* = [a]f_* = af$. Tas nozīmē, ka $\pi f_* = f$; tātad diagramma (D1) ir komutatīva.

(iii) Pieņemsim, ka $\varphi : A/\mathrm{K\overline{er}}f \to B$ ir attēlojums, kam diagramma (D1) ir komutatīva, proti, $\pi\varphi = f$, tad

$$\forall a \in A \quad [a]\varphi = a\pi\varphi = af = [a]f_*.$$

Tas demonstrē, ka eksistē tikai viens attēlojums $f_* : A/\mathrm{K\overline{er}}f \to B$, kam diagramma (D1) ir komutatīva.

(iv) Pieņemsim, ka $[x] \neq [a]$, tad $x \neq a$ un $xf \neq af$. No šejienes

$$[x]f_* = xf \neq af = [af].$$

Tātad $f_* : A/\mathrm{K\overline{er}}f \to B$ ir injekcija. ■

15. nodaļa

KOPAS APJOMS

Kopas apjoms. Sanumurējamas un nesanumurējamas kopas. Par kopu teorijas paradoksiem.

15.1. Kopas apjoms

15.1.1. Definīcija. *Saka, ka divas galīgas kopas ir vienlielas, ja tām ir vienāds elementu skaits.*

15.1.2. Piemērs. Kopas $\{\exists, \forall, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ un $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ir vienlielas. Abas kopas satur 7 elementus.

15.1.3. Definīcija. *Saka, ka divām kopām K_1 un K_2 ir vienāds apjoms, ja eksistē bijekcija $\beta : K_1 \to K_2$.*

Šai gadījumā lieto pierakstu $|K_1| = |K_2|$. Dotā definīcija ir visaptveroša tai nozīmē, ka var parādīt, ka divas galīgas kopas ir vienlielas tad un tikai tad, ja tām ir vienāds apjoms.

15.1.4. Apgalvojums. *Divas galīgas kopas ir vienlielas tad un tikai tad, ja tām ir vienāds apjoms.*

$\square$ $\Rightarrow$ Pieņemsim, ka kopas A un B ir vienlielas un tām elementu skaits ir skaitlis 1. Konkrētības labad $A = \{a\}$ un $B = \{b\}$, tad attēlojums

$$\varphi : A \to B : a \mapsto b$$

ir bijekcija. Tātad tās ir ar vienādu apjomu.

Tālākais pierādījums induktīvs. Pieņemsim, ka kopas A un B ir vienlielas un tām elementu skaits ir skaitlis $n+1$. Izvēlamies kādu kopas A elementu a un kādu kopas B elementu b. Saskaņā ar izvēles aksiomu tas ir iespējams. Kopas $A_1 \leftharpoondown\!\!\!\!\!\!\rightharpoonup A\backslash\{a\}$, $B_1 \leftharpoondown\!\!\!\!\!\!\rightharpoonup B\backslash\{b\}$ ir vienlielas, jo šo kopu elementu skaits ir n. Atsaucoties uz indukcijas pieņēmumu varam apgalvot, ka eksistē bijekcija $\psi_1 : A_1 \to B_1$. No šejienes attēlojums

$$\psi(x) \leftharpoondown\!\!\!\!\!\!\rightharpoonup \begin{cases} \psi_1(x), & \text{ja} \quad x \neq a; \\ b, & \text{ja} \quad x = a \end{cases}$$

ir bijekcija $\psi : A \to B$.

$\Leftarrow$ Pieņemsim, ka $\varphi : A \to B$ ir bijekcija un kopas A un B ir galīgas. Pieņemsim, ka kopas A elementu skaits ir 1. Konkrētības labad pieņemsim, ka $A = \{a\}$, tad $\varphi(a) \in B$. Tātad kopa B satur vismaz vienu elementu. Pieņemsim, ka $B_1 \leftharpoondown\!\!\!\!\!\!\rightharpoonup B \setminus \{\varphi(a)\}$. Ja $B_1 \neq \emptyset$, tad eksistē $b \in B_1$. Tā kā $\varphi(a) \neq b$, tad $\varphi : A \to B$ nav bijekcija. Atliek tikai iespēja: $B_1 = \emptyset$, bet tad kopa B sastāv no viena paša elementa.

Tālākais pierādījums induktīvs. Pieņemsim, ka kopas A elementu skaits ir $n+1$ un $\psi : A \to B$ ir bijekcija. Izvēlamies kādu kopas A elementu a, tad $\psi(a) \in B$. Pieņemsim, ka $A' \leftharpoondown\!\!\!\!\!\!\rightharpoonup A \setminus \{a\}$ un $B' \leftharpoondown\!\!\!\!\!\!\rightharpoonup B \setminus \{\psi(a)\}$, tad $\psi|A_1 : A_1 \to B_1$ ir bijekcija, jo $\psi : A \to B$ ir bijekcija.

Kopas A_1 elementu skaits ir n, tāpēc saskaņā ar indukcijas pieņēmumu arī kopas B' elementu skaits ir n. No šejienes: kopas B elementu skaits ir $n+1$. ■

Definīcijas 15.1.3 priekšrocība ir tā, ka tagad iespējams salīdzināt arī bezgalīgas kopas.

15.1.5. Vingrinājums. *Attiecība* $|A| = |B|$ *ir ekvivalences tipa predikāts.*

Līdz ar to visas kopas sadalās ekvivalences klasēs. Katru ekvivalences klasi $[A]$ sauc par kopas A *apjomu.* Galīgām kopām šīs ekvivalences klases raksturo ar elementu skaitu, tukšai kopai $|\emptyset| \leftharpoondown\!\!\!\!\!\!\rightharpoonup 0$, naturālo skaitļu kopas apjomam mēdz lietot speciālu apzīmējumu $\aleph_0$ (lasa "alef nulle").

Pirmajā brīdī viss liekas korekti, taču jāatzīst, ka visu kopu kopa nemaz nav kopa, un tāpēc jēdzienu par ekvivalences tipa predikātu nākas pārcelt uz vispārīgākiem objektiem, proti, klasēm.

Ja eksistē injekcija $\varphi : A \to B$, tad lieto apzīmējumu $|A| \leq |B|$ un saka: "kopas A apjoms nepārsniedz kopas B apjomu" vai arī "kopas A apjoms ir mazāks, vienāds ar kopas B apjomu". Ja $|A| \leq |B|$ un $|A| \neq |B|$, tad lieto apzīmējumu $|A| < |B|$ un saka: "kopas A apjoms ir mazāks par kopas B apjomu".

Dažkārt apjomus mēdz saukt par *kardinālskaitļiem* un kopas A apjoma apzīmēšanai lietot vienu no šādiem pierakstiem: $Card(A)$ vai $card(A)$.

15.2. Galīgas kopas

15.2.1. Apgalvojums. *Ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir galīgas kopas, tad*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

□ Vispirms parādīsim, ka $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$. Pieņemsim, ka

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{un} \quad B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

tad

$$C_i \leftharpoondown A_1 \times \{b_i\}.$$

Tā kā $\{C_i \,|\, i \in \overline{1, m}\}$ ir kopas $A_1 \times A_2$ sadalījums, tad

$$|A_1 \times A_2| = |C_1| + |C_2| + \ldots + |C_m| = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{m} = km = |A_1| \cdot |A_2|.$$

Turpmākais pierādījums induktīvs, proti,

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| &= |A_1 \times (A_2 \times \ldots \times A_n)| \\ &= |A_1| \cdot |A_2 \times \ldots \times A_n| \\ &= |A_1| \cdot (|A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|) \\ &= |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

15.2.2. Vingrinājumi.

$$\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & |A \cup B| & = & |A| + |B| - |A \cap B|, \\ \text{(ii)} & |A \cap B| & = & |A| + |B| - |A \cup B|, \\ \text{(iii)} & |A \setminus B| & = & |A| - |A \cap B|. \end{array}$$

15.3. Sanumurējamas kopas

15.3.1. Definīcija. *Kopu A sauc par bezgalīgu sanumurējamu kopu, ja tās apjoms $|A| = \aleph_0$. Tukšu kopu, visas galīgās kopas un bezgalīgās sanumurējamās kopas sauc par sanumurējamām kopām.*

Dažkārt par sanumurējamām kopām literatūrā medz saukt tikai bezgalīgās sanumurējamās kopas.

15.3.2. Apgalvojums. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

$\square$ Mums kaut kādā veidā jānodefinē bijekcija $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Attēlojumu φ definēsim induktīvi:

$$(0,0) \mapsto 0,\ (0,1) \mapsto 1,\ (1,0) \mapsto 2,$$

Pieņemsim, ka esam definējumši attēlojumu φ visiem pāriem (p,q), kuriem $p+q \leq n$, un pieņemsim, ka $\varphi : (n,0) \mapsto m-1$, tad

$$(0,n+1) \mapsto m, (1,n) \mapsto m+1, (2,n-1) \mapsto m+2, \ldots, (n+1,0) \mapsto m+n+1.$$

Vizuāli tas izskatās šādi:

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[dl] & (0,2) \arrow[dl] & (0,3) \arrow[dl] & (0,4) \arrow[dl] & \cdots \\
(1,0) \arrow[urr] & (1,1) \arrow[dl] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & \cdot & \cdot \\
(2,0) \arrow[uurrr] & (2,1) \arrow[dl] & (2,2) \arrow[dl] & \cdot & \cdot & \cdot \\
(3,0) \arrow[uuurrrr] & (3,1) \arrow[dl] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(4,0) \arrow[uuuurrrrr] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \blacksquare
\end{tikzcd}$$

15.3.3. Vingrinājumi.

(i) $|\{x \,|\, x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0\}| = \aleph_0$,

(ii) $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

15.4. Kontinuums

15.4.1. Definīcija. *Kopu A, kuras apjoms $|A| > \aleph_0$ sauc par nesanumurējamu kopu.*

15.4.2. Apgalvojums. *Eksistē nesanumurējamas kopas.*

$\square$ Pieņemsim, ka $\{0,1\}^\omega \leftharpoondown \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \,|\, \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{N}\}$. Tā ir virkņu, kuras elementi ir nulles un vieninieki, veidotā kopa.

Pieņemsim, ka kopa $\{0,1\}^\omega$ ir sanumurējama, tad eksistē bijekcija

$$\varphi : \{0,1\}^\omega \to \mathbb{N}.$$

Citiem vārdiem sakot

$$\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n), \ldots \tag{15.1}$$

ir visu kopas $\{0,1\}^\omega$ elementu uzskaitījums. Pieņemsim, ka

$$\varphi(n) = a_{n0}, a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots$$

Tas uzskatāmi demonstrē, ka $\varphi(n)$ ir virkne, tāpēc tā ir funkcija $\varphi(n)(k)$.

Definējam virkni $f \in \{0,1\}^\omega$:

$$f(k) \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad \varphi(k)(k) = 1; \\ 1, & \text{ja} \quad \varphi(k)(k) = 0. \end{cases}$$

Šīs virknes sarakstā (15.1) nav. Pretruna! Tātad $\{0,1\}^\omega$ nav sanumurējama.

Vizuāli pierādījuma ideja izskatās šādi:

$$\begin{array}{l} \color{red}{a_{00}}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, \ldots, a_{0k}, \ldots \\ a_{10}, \color{red}{a_{11}}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1k}, \ldots \\ a_{20}, a_{21}, \color{red}{a_{22}}, a_{23}, \ldots, a_{2k}, \ldots \\ a_{30}, a_{31}, a_{32}, \color{red}{a_{33}}, \ldots, a_{3k}, \ldots \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots, \color{red}{a_{kk}}, \ldots \end{array} \tag{15.2}$$

Virknes $f(k)$ definēšanai mēs izmantojām sarkanā krāsā iekrāsotos elementus. Mēs definējām

$$f(k) \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad a_{kk} = 1; \\ 1, & \text{ja} \quad a_{kk} = 0. \end{cases}$$

Tā rezultātā sarakstā (15.2) virknes f nav. ■

15.4.3. Definīcija. *Kopas* $\{0,1\}^\omega$ *apjomam mēdz lietot lietot speciālu apzīmējumu* $\mathfrak{c}$, *un to sauc par kontinuuma apjomu, t.i.,* $\mathfrak{c} \leftharpoondown |\{0,1\}^\omega|$.

15.4.4. Vingrinājumi.

(i) $|[0;1]| = \mathfrak{c}$,

(ii) $|\{x \mid x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}| = \mathfrak{c}$,

(iii) $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$,

(iv) $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$,

(v) $|\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$.

15.5. Rasela paradokss

Naivajā kopu teorijā, kurā strādā nospiedošs vairākums matemātiķu, viens no populārākajiem kopas uzdošanas veidiem ir $\mathfrak{Q} \leftharpoondown \{x \mid Q(x)\}$, kur Q kāds patvaļīgs predikāts. Angļu filozofs un matemātiķis Bērtrands Rassels XX gadsimta sākumā nodemonstrēja, ka pilnīgi patvaļīgi tā rīkoties nevar.

- Pieņemsim, ka $\mathfrak{R} \leftharpoondown \{\mathfrak{K} \mid \mathfrak{K} \notin \mathfrak{K}\}$, kur $\mathfrak{K}$ — patvaļīgas kopas.
- Vai $\mathfrak{R}$ ir kopa?
- Ja ir, tad varam uzdot jautājumu:
  — Vai $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$?
- Izanalizēsim abas iespējas.

1. Ja $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$, tad saskaņā ar kopas $\mathfrak{R}$ definīciju tas nozīmē,
   ka $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$. Pretruna!

2. Ja $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$, tad saskaņā ar kopas $\mathfrak{R}$ definīciju tas nozīmē,

   ka $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$. Atkal pretruna!

Šie spriedumi pārliecinoši demonstrē, ka $\mathfrak{R}$ nav kopa, un pretrunas vairs nav. Taču problēma paliek:

— Kā tad īsti ir ar kopas uzdošanas veidu $\{x \mid Q(x)\}$?

Drīz pēc Rasela paradoksa parādīšanās matemātiķi atrada veidu, kā no šīs nepatīkamās situācijas izglābties. Tika radīta kopu teorijas aksiomātika, kas vairs šādas pretrunas nesaturēja.

Matemātiķi ievēroja, ka kopas nedrīkst būt pārāk lielas. Tos kopām līdzīgos objektus, kas jau satur paradoksus, matemātiķi nosauca par *klasēm*. Te gan lasītājs jābrīdina, ka terminu 'klase' ļoti bieži literatūrā lieto kā sinonīmu terminam 'kopa'. Tā, ka studējot konkrētu literatūru, lasītājam jābūt nedaudz piesardzīgam, vismaz tai ziņā, lai rastu skaidrību, kādā nozīmē vienā vai otrā kontekstā lietots termins 'klase'.

— Bet kā tad īsti ir ar to nospiedošo matemātiķu vairākumu, kas lieto tā saukto naivo kopu teoriju un neinteresējas par kopu teorijas aksiomātiku?

Izrādās, ja kopu $\mathfrak{Q}$ definē šādi:

$$\mathfrak{Q} \leftharpoondown\!\!\!= \{x \mid Q(x)\},$$

kur Q ir kādā citā kopā $\mathfrak{K}$ definēts predikāts, tad $\mathfrak{Q}$ ir kopa. Tieši šī ir tā situācija, kas interesē nospiedošu matemātiķu vairākumu, un tāpēc viņi var droši darboties naivās kopu teorijas ietvaros.

Bibliogrāfija

[1] J. Cīrulis. (2007) *Matemātiskā loģika un kopu teorija.* Apgāds Zvaigzne ABC, — 278 lpp.

[2] V. Detlovs. (1967) *Matemātiskās loģikas un kopu teorijas elementi.* Rīga, LVU, — 292 lpp.

[3] V. Detlovs. (1974) *Matemātiskā loģika.* Rīga, "Zvaigzne", — 279 lpp.

[4] Joseph R. Shoenfield (2001) *Mathematical Logic.* AK Peters, Ltd

[5] С. Д. Шапорев. (2005) *Математическаы логика.* Санкт–Петербург «БХВ–Петербург», — 410 с.